

Table des matières

Sigmas, binôme et factorisations

I.	Le symbole Σ	2
1.	Somme de n éléments	2
2.	Somme d'éléments indexés de 0 à n	4
3.	Généralisation	5
II.	Factorisation de $a^n - b^n$	8
1.	Cas particuliers	8
2.	Cas général	9
III.	Fonctions polynomiales	10
1.	Définition – Unicité des coefficients	10
2.	Factorisation de $(x - a)$ dans une fonction polynomiale	12
IV.	Formule du binôme (hors programme TS)	15
1.	Développement des puissances d'un binôme	15
2.	Triangle de Pascal et formule du binôme	18
3.	Expression des coefficients binomiaux	20
V.	Pour finir, quelques exercices	25
1.	Dans le domaine des nombres réels	25
2.	Pour ceux qui connaissent les complexes	26
VI.	Solutions des exercices	27

Sigmas, binôme et factorisations

Avant de commencer !

- N'oubliez pas de lire ou relire [<l'introduction>](#) qui explique le but de ce travail.
- Si nécessaire, voir aussi le [<mode d'emploi>](#) pour les liens [<www>](#)

I. Le symbole Σ

Le but de cet exposé est de démystifier, et surtout de dédramatiser, l'utilisation du symbole Σ que l'on rencontre dans de nombreuses formules de mathématiques, et qui permet d'écrire des sommes possédant un nombre variable de termes.

Remarque Le symbole Σ est une lettre grecque majuscule qui se lit « sigma ». Si vous n'êtes pas familier avec l'alphabet grec, dont on utilise souvent les caractères en Mathématiques, je vous conseille vivement de visiter [<ce site>](#).

Il s'agit ici, non pas de vous apprendre des formules et des règles d'utilisation à appliquer automatiquement, mais plutôt de vous inciter à réfléchir sur quelques situations élémentaires ; cela vous permettra de comprendre en profondeur ce que vous faites et de vous familiariser avec la manipulation de sommes écrites à l'aide de ce symbole Σ , de façon à faire disparaître toute appréhension et toute angoisse lors de l'utilisation de telles écritures.

1. Somme de n éléments

Dans cette partie,

- n désigne un entier naturel non nul,
- a_1, a_2, \dots, a_n sont des éléments de l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels.

Remarque Si vous connaissez les nombres complexes, vous pourrez facilement vérifier que tous les résultats sont encore valables lorsque les a_k sont complexes.

Définition 1

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et si a_1, a_2, \dots, a_n sont n éléments de \mathbb{R} , alors la notation :

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

représente la somme de ces éléments (qui peuvent être distincts ou non).

Notation Au lieu de $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, on rencontre aussi $a_1 + \dots + a_n$.

Remarque L'écriture $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ peut laisser supposer qu'il y a au moins trois éléments a_1 , a_2 et a_n . Mais, par convention :

- si $n = 1$, alors $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ représente a_1 ;
- si $n = 2$, alors $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ représente $a_1 + a_2$.

L'un des intérêts de la notation $\sum_{k=1}^n a_k$ est d'éviter ce genre de question. On a donc :

$$\sum_{k=1}^1 a_k = a_1 \quad , \quad \sum_{k=1}^2 a_k = a_1 + a_2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^3 a_k = a_1 + a_2 + a_3.$$

Méthode Quand vous vous posez une question sur une quantité telle que $\sum_{k=1}^n a_k$, vous ne devez pas avoir honte de l'écrire sous la forme :

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \dots + a_n,$$

voire d'étudier un ou deux cas particuliers comme par exemple :

$$\sum_{k=1}^5 a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

En effet, dans un tel cas, l'on peut tout écrire sans le moindre point de suspension, ce qui permet de bien voir les choses. Il est préférable de faire ce genre d'essais plutôt que de ne pas avancer ou d'écrire n'importe quoi en tirant à pile ou face.

www

Ex 1 : On suppose, dans cet exercice, disposer aussi de n réels b_1, b_2, \dots, b_n . Que pensez-vous des égalités suivantes ?

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) &= \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) + \left(\sum_{k=1}^n b_k \right) \\ \sum_{k=1}^n (a_k b_k) &= \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \times \left(\sum_{k=1}^n b_k \right) ? \end{aligned}$$

p.27

www

Ex 2 : Soit r un nombre réel quelconque.

1. Que pensez-vous de l'égalité $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{\ell=1}^n a_\ell$?

2. De même, que pensez-vous des égalités suivantes ?

$$\sum_{k=1}^n (r a_k) = r \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n (r + a_k) = r + \sum_{k=1}^n a_k ?$$

3. Peut-on remplacer k par r dans l'égalité $\sum_{k=1}^n (r a_k) = r \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)$?

p.27

Remarque Il est important de comprendre que, dans une expression telle que :

$$\sum_{k=1}^n a_k,$$

il n'y a en fait aucune variable k : on dit alors que k est une **variable muette**. Comme on vient de le voir dans la question 1. de l'exercice précédent, on peut remplacer k par n'importe quelle autre lettre, à condition évidemment (cf. question 3. du même exercice) de ne pas utiliser une lettre figurant déjà dans l'expression.

www **Ex 3 :** Pour $p \in \mathbb{N}^*$, que pensez-vous de la relation $\sum_{k=1}^n a_k^p = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^p$? **p.28**

2. Somme d'éléments indexés de 0 à n

Dans certains cas, les éléments de \mathbb{R} dont on veut faire la somme sont indexés non pas par les éléments de l'intervalle d'entiers $\llbracket 1, n \rrbracket$ mais par ceux de l'intervalle d'entiers $\llbracket 0, n \rrbracket$. C'est par exemple le cas lorsque l'on s'intéresse aux premiers éléments d'une suite. Si $n \in \mathbb{N}$ et si a_0, a_1, \dots, a_n sont des éléments de \mathbb{R} , alors la notation :

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n \quad \text{ou} \quad \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + \dots + a_n$$

représente leur somme. *Attention, il y a alors $n + 1$ éléments dans cette somme !*

Comme précédemment, on a les cas particuliers :

$$\sum_{k=0}^0 a_k = a_0, \quad \sum_{k=0}^1 a_k = a_0 + a_1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^2 a_k = a_0 + a_1 + a_2.$$

www **Ex 4 :** Soit u une suite arithmétique.

1. Rappeler précisément la définition d'une telle suite.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Montrer que $\sum_{k=0}^n u_k = (n + 1) \frac{u_0 + u_n}{2}$. **p.29**

Méthode Bien plus que la formule donnant la somme des premiers termes d'une progression arithmétique, c'est la ruse précédemment utilisée qu'il faut retenir : elle permet en effet de retrouver la valeur de cette somme S_n sans risquer de se tromper d'un cran. Si, en cas de doute, vous refaites cette manipulation (de tête dès que possible), vous n'aurez aucun problème pour toujours donner une formule correcte.

Comme cas particulier de ce qui précède, rappelons la formule donnant la somme des n premiers entiers naturels non nuls (qui ne vous posera jamais le moindre problème de mémorisation si vous appliquez la méthode précédente) :

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=0}^n k = \frac{(n + 1)n}{2}.$$

Symétrisation d'index Dans l'exercice 4, nous avons utilisé une astuce consistant à écrire une somme « à l'envers », ce qui correspond une relation du type :

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0.$$

Cette égalité, évidente d'après les règles usuelles de calcul sur les nombre réels, peut s'écrire à l'aide de Σ sous la forme :

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{\ell=0}^n a_{n-\ell}.$$

On peut formaliser cette dernière relation de la façon suivante.

- Dans la somme de gauche, on pose $k = n - \ell$, transformant ainsi a_k en $a_{n-\ell}$.
- Lorsque k varie de 0 à n , alors $\ell = n - k$ varie de n à 0, mais on écrit $\sum_{\ell=0}^n$ car la borne mise en bas du Σ est toujours inférieure à celle mise en haut.

Comme les variables k et ℓ sont muettes, rien n'empêche ensuite de changer d'index dans la seconde somme pour écrire :

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{\ell=0}^n a_{n-\ell} = \sum_{k=0}^n a_{n-k}.$$

www **Ex 5 :** Rédiger une autre justification de la somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite arithmétique sans utiliser de points de suspension. p.29

www **Ex 6 :** Quelle(s) règle(s) de symétrisation peut-on donner pour $\sum_{k=1}^n a_k$? p.30

3. Généralisation

www **Ex 7 :** Soit u une suite géométrique.

1. Rappeler précisément la définition d'une telle suite.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Simplifier S_n .

(Ici, se contenter d'une rédaction utilisant des points de suspension.) p.30

Comme on a pu le voir dans l'exercice précédent, parfois, pour $n \in \mathbb{N}$, on dispose des éléments a_0, a_1, \dots, a_n mais on n'a envie de ne faire que la somme d'une partie d'entre eux, à savoir les termes dont l'index va de p à q avec $0 \leq p \leq q \leq n$. Une telle somme se note alors :

$$\sum_{k=p}^q a_k = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q \quad \text{ou} \quad \sum_{k=p}^q a_k = a_p + \cdots + a_q,$$

toujours avec les cas particuliers :

$$\sum_{k=p}^p a_k = a_p \quad , \quad \sum_{k=p}^{p+1} a_k = a_p + a_{p+1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{p+2} a_k = a_p + a_{p+1} + a_{p+2}.$$

www

Ex 8 : Soit p, q et n des entiers naturels vérifiant $0 \leq p \leq q \leq n$, ainsi que $n + 1$ nombres réels a_0, a_1, \dots, a_n .

1. Combien y a-t-il d'éléments dans la somme $\sum_{k=p}^q a_k$?
2. En supposant $p < q$, exprimer plus simplement $\sum_{k=0}^q a_k - \sum_{k=0}^p a_k$.
3. Exprimer $\sum_{k=p}^q a_k$ comme une somme $\sum_{\ell=0}^{??} a_{??}$.

p.31

Translation d'index On se réfère souvent à une égalité du type :

$$\sum_{k=p}^q a_k = \sum_{\ell=0}^{q-p} a_{p+\ell}$$

en parlant de translation d'index. Pour faire une telle translation d'index :

- dans un premier temps, on choisit un nouvel index, par exemple ℓ ;
- on dit alors que, dans la première somme, on pose $k = p + \ell$;
- on obtient les bornes de la variable ℓ en considérant les valeurs limites de k :
 - * pour avoir $p = k = p + \ell$, il suffit de prendre $\ell = 0$;
 - * pour avoir $q = k = p + \ell$, il suffit de prendre $\ell = q - p$.

Même s'il est plus sûr d'utiliser deux lettres différentes pour faire l'opération précédente, comme k et ℓ sont des variables muettes, on s'empresse souvent dans un second temps, remplacer ℓ par k , ce qui donne alors :

$$\sum_{k=p}^q a_k = \sum_{k=0}^{q-p} a_{p+k}.$$

www

Ex 9 : Rédiger une autre justification de la somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique sans utiliser de points de suspension.

p.31

www

Ex 10 : Quelle règle de symétrisation peut-on donner pour $\sum_{k=p}^q a_k$?

p.32

www

Ex 11 : Soit u une suite arithmétique ainsi que des entiers p et q vérifiant $0 \leq p \leq q$.

Montrer que l'on a :

$$\sum_{k=p}^q u_k = (q - p + 1) \frac{(u_p + u_q)}{2}.$$

p.32

En appliquant le résultat de l'exercice précédent, on retrouve que :

$$\sum_{k=1}^n k = n \frac{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

[www](#) **Ex 12 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\sum_{k=1}^n 2k$. p.33

[www](#) **Ex 13 :** Pour $n \in \mathbb{N}$, simplifier : $A_n = \sum_{k=0}^n (k+n)$. p.33

[www](#) **Ex 14 :** Calculer $\sum_{k=1}^n nk$. p.33

[www](#) **Ex 15 :** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad \text{p.33}$$

C'est une formule qui peut parfois rendre des services !

[www](#) **Ex 16 :** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \quad \text{p.34}$$

C'est aussi une formule qui peut rendre des services !

II. Factorisation de $a^n - b^n$

Dans toute cette section,

- n est un entier naturel supérieur ou égal à 2,
- a et b désignent deux nombres réels.

Remarque Si vous connaissez les nombres complexes, vous pourrez facilement vérifier que tous les résultats sont encore valables lorsque a et b sont complexes.

1. Cas particuliers

Pour $n = 2$, vous connaissez depuis longtemps la fameuse formule :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

[www](#) **Ex 17 :** (*Seulement si vous connaissez les matrices*)

Si A et B sont deux matrices 2×2 , a-t-on aussi :

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B) ?$$

p.34

Pour $n = 3$, on a cette autre formule indispensable pour la suite de vos études :

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

[www](#) **Ex 18 :** Comment démontrer la formule précédente ?

p.35

Remarque Dans le membre de droite de chacune des formules précédentes,

- il y a $(a - b)$ en facteur ; cela paraît normal puisque les deux membres de gauche, aussi bien $a^2 - b^2$ que $a^3 - b^3$, sont nuls lorsque $a = b$;
- le second facteur est homogène en a et b : par exemple, dans la dernière relation, pour chacun des termes figurant dans ce second facteur, a^2 , ab et b^2 , la somme des puissances vaut 2.

[www](#) **Ex 19 :** Peut-on donner une factorisation analogue pour $a^3 + b^3$?

p.35

[www](#) **Ex 20 :** (*Uniquement si vous connaissez les complexes*)

Comment transformer $a^2 + b^2$ en une différence de deux carrés ?

p.35

2. Cas général

Pour tout entier n supérieur à 2, on peut généraliser les formules précédentes.

Proposition 1

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, tout $b \in \mathbb{R}$ et tout entier n supérieur à 2, on a :

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

ce que l'on peut aussi écrire :

$$a^n - b^n = (a - b) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k \right).$$

www Ex 21 : Comment démontrer la formule précédente ? p.35

Remarque Comme pour les cas particuliers déjà rencontrés, le terme :

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

est homogène de degré $n - 1$; cela peut s'interpréter de diverses façons :

- c'est une somme de termes de la forme $a^{n-1-k} b^k$ où la somme des puissances utilisées vaut $(n - 1 - k) + k = n - 1$;
- si l'on remplace a et b respectivement par ta et tb où t est un réel (voire un complexe), alors le résultat est multiplié par t^{n-1} ;
- dans le cas particulier $n = 3$, si a et b représentent des longueurs, alors :
 - * $a^3 - b^3$ représente un volume,
 - * $a - b$ représente une longueur et $a^2 + ab + b^2$ représente une surface ;

On retrouve l'équation aux dimensions (*cf.* Physique) :

$$\text{Volume} = \text{Longueur} \times \text{Surface}.$$

Par « homogénéité physique », les termes dont la surface est une somme ne peuvent être que des surfaces.

www Ex 22 : Pour quels $n \in \mathbb{N}$ peut-on en déduire une factorisation de $a^n + b^n$? p.36
(facilement et sans introduire le moindre complexe)

Méthode Si un jour vous hésitez par exemple entre :

$$a^n - b^n = (a - b) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k \right) \quad \text{et} \quad a^n - b^n = (a - b) \left(\sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k \right)$$

- il n'est absolument pas interdit de regarder le cas particulier $n = 2$;
- la remarque précédente sur l'homogénéité vous permet aussi de choisir : en effet, comme $a^n - b^n$ est homogène de degré n et $a - b$ est de degré 1, leur quotient ne peut être homogène que de degré $n - 1$.

Au sujet des suites géométriques Si $a = 1$, la formule précédente devient :

$$1 - b^n = (1 - b) \left(\sum_{k=0}^{n-1} b^k \right) \tag{i}$$

et si $b \neq 1$, alors cela s'écrit aussi :

$$\sum_{k=0}^{n-1} b^k = \frac{1 - b^n}{1 - b}. \tag{ii}$$

Ainsi (i) et (ii) sont deux facettes différentes d'une même réalité et, si vous vous entraînez à passer mentalement de l'une à l'autre, alors vous n'aurez plus aucune angoisse pour écrire la formule donnant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique. En effet pour (i), il ne devrait y avoir aucun problème puisque ;

- le membre de gauche $1 - b^n$ est de degré n en b ,
- comme $1 - b$ est de degré 1, l'autre facteur doit être de degré $n - 1$.

III. Fonctions polynomiales

1. Définition – Unicité des coefficients

Définition 2

Une fonction P de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est une **fonction polynomiale** à coefficients réels lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et une famille p_0, p_1, \dots, p_n de $n + 1$ réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k$$

ou encore, pour tout $x \in \mathbb{R} : P(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots + p_n x^n$.

Notation Dans la suite de ce chapitre, on désignera par $\mathbb{R}[x]$ l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients dans \mathbb{R} .

Exemple La fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction polynomiale.
 $x \mapsto x^2 + 3x^4 - x^5$

Au passage, nous pouvons justifier un résultat que vous avez déjà rencontré et que nous utiliserons dans la suite : il s'agit de la possibilité d'identifier les coefficients de deux fonctions polynomiales égales. Commençons par un cas particulier.

Proposition 2

Soit $n \in \mathbb{N}$ ainsi qu'une famille p_0, p_1, \dots, p_n de $n + 1$ éléments de \mathbb{R} tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^n p_k x^k = 0.$$

Alors, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $p_k = 0$.

- www** **Ex 23 :** (*Première démonstration de la proposition précédente*)
1. Montrer que $p_0 = 0$.
 2. Si $n \geq 1$, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=1}^n p_k x^{k-1} = 0$.
 3. En déduire le résultat de la proposition précédente. p.36

- www** **Ex 24 :** (*Autre démonstration, par l'absurde, de la proposition précédente*)
Prendre une famille p_0, p_1, \dots, p_n de $n + 1$ éléments de \mathbb{R} tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^n p_k x^k = 0.$$

En supposant que les p_k ne sont pas tous nuls, considérer r le plus petit des entiers k tels que $p_k \neq 0$. p.37

Nous pouvons maintenant en déduire un résultat plus général.

Proposition 3

Soit un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ ainsi que deux familles p_0, p_1, \dots, p_n et q_0, q_1, \dots, q_n d'éléments de \mathbb{R} tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^n p_k x^k = \sum_{k=0}^n q_k x^k.$$

Alors on a : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad p_k = q_k$.

- www** **Ex 25 :** Démontrer le résultat précédent. p.38

Un résultat permettant d'identifier. Le résultat que l'on vient d'établir dans la proposition précédente est un résultat d'unicité, permettant de faire une « identification ». En effet ce résultat dit que si, pour chaque $x \in \mathbb{R}$, les deux fonctions :

$$P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \sum_{k=0}^n p_k x^k \quad \quad \quad x \longmapsto \sum_{k=0}^n q_k x^k$$

prennent les mêmes valeurs, alors les coefficients correspondants sont égaux. Autrement dit, si les fonctions polynomiales sont égales, alors on peut alors identifier deux à deux les coefficients correspondants.

Vous devez garder à l'esprit que l'on ne peut « identifier » des expressions analogues pour en déduire l'égalité de certaines de leurs parties qu'après avoir, comme ci-dessus, démontré un tel résultat d'unicité. Il faut toujours y penser lorsque (souvent pour vous éviter de réfléchir) vous vous posez (ou vous posez à un interlocuteur quelconque) une question du type : « a-t-on le droit d'identifier ? ». Il ne s'agit pas d'un droit (plus ou moins acquis) mais d'un résultat, en fait un résultat d'unicité, que l'on doit avoir démontré avant de pouvoir l'utiliser.

Remarque sur la méthode utilisée pour prouver le résultat précédent

- Dans la proposition 2, nous avons démontré un cas particulier, lorsque la fonction P a tous ses coefficients nuls ; cela simplifie l'écriture de la partie technique de la démonstration car on n'utilise que la moitié des coefficients.
- Dans la proposition 3, nous avons utilisé ce résultat particulier pour démontrer, et alors très rapidement, le cas général.

Enfin, on peut signaler que ce résultat d'unicité reste valable même si les familles des p_k et de q_k n'ont pas le même nombre d'éléments : il suffit alors de compléter par des 0 la famille qui a le moins de coefficients. On pourrait avoir un résultat plus précis en introduisant la notion de degré mais cela sort du cadre de cette étude.

2. Factorisation de $(x - a)$ dans une fonction polynomiale

Nous pouvons aussi justifier dans toute sa généralité un résultat que vous avez certainement déjà utilisé dans de nombreux cas particuliers.

Proposition 4

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors on a $P(a) = 0$ si, et seulement si, il existe une fonction polynomiale $Q \in \mathbb{R}[x]$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = (x - a) Q(x).$$

www

Ex 26 : (Démonstration du résultat précédent)

1. Comment résumer en un mot le type de démonstration qu'il faut faire ?
2. On suppose $P(a) = 0$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = P(x) - P(a) = (x - a) Q(x).$$

p.38

Remarques

- Les diverses questions proposées par l'exercice précédent étaient là pour vous aider dans la démonstration de la proposition mais, à l'avenir, ce sera à vous de vous poser ce genre de questions lorsque vous aborderez une démonstration.
 - * Quelle est le type de la question posée ?
 - * Quelles sont les données ?
 - * Que faut-il démontrer et comment puis-je le faire ?
- La démonstration de l'exercice précédent fournit une méthode de calcul du quotient de $P(x)$ par $(x - a)$ mais souvent ce n'est pas la plus efficace. Une autre méthode vous est proposée dans l'exercice suivant.

www

Ex 27 : Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ défini par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x + 1$.

1. Vérifier qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = (x - 1)Q(x)$.
2. L'objet de cette question est de déterminer l'expression développée de Q . Comme c'est le premier calcul de ce genre, voici un peu d'aide.
 - (a) Quel est le degré de Q ?
 - (b) Quel est le terme de plus haut degré de Q ?
 - (c) En utilisant le coefficient de x^4 dans P , déterminer le coefficient de x^3 dans Q .
 - (d) En utilisant le terme de degré 3 de P , déterminer le terme de degré 2 de Q .
 - (e) Déterminer de même les deux derniers termes de Q .
 - (f) Que peut-on (doit-on) faire du terme non utilisé de P ?

p.39

Remarque L'exercice précédent comportait une multitude de questions car c'était la première fois que vous rencontriez cette méthode ; à l'avenir, ce sera à vous, et à vous seul, de vous les poser afin de suivre le même cheminement.

Ce qu'il ne faut surtout pas faire !

Dans le calcul précédent, certains auraient pu être tentés de commencer par développer tout le produit en écrivant quelque chose du genre :

$$\begin{aligned}
 & (x - 1) (q_4 x^4 + q_3 x^3 + q_2 x^2 + q_1 x + q_0) \\
 &= q_4 x^5 + q_3 x^4 + q_2 x^3 + q_1 x^2 + q_0 x \\
 &\quad - q_4 x^4 - q_3 x^3 - q_2 x^2 - q_1 x - q_0 \\
 &= q_4 x^5 + (q_3 - q_4) x^4 + (q_2 - q_3) x^3 + (q_1 - q_2) x^2 + (q_0 - q_1) x - q_0,
 \end{aligned}$$

avant d'identifier avec $P(x)$. Cela aurait été une intolérable perte de temps et, contrairement à ce que vous pensez certainement, une erreur stratégique : en effet, dans un calcul de ce type, trop écrire incite à mal écrire et beaucoup recopier, ce qui augmente énormément le risque d'erreurs.

Méthode Ce qui vient d'être décrit dans l'exercice précédente peut paraître abominablement long mais tous ces calculs, que j'ai détaillés pour vous expliquer, s'écrivent normalement sur une seule ligne.

- On commence par écrire :

$$x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x^4 + \dots).$$

- Puis on se dit que le terme x^4 de $Q(x)$ multiplié par le -1 du $(x - 1)$ va donner $-x^4$; comme on veut $-3x^4$ dans P , ce qui manque, à savoir $-2x^4$, va provenir du produit du x de $(x - 1)$ par le terme en x^3 de $Q(x)$, ce qui permet de compléter la factorisation :

$$x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x^4 - 2x^3 + \dots)$$

- Ensuite on se dit que le terme x^3 de $Q(x)$ multiplié par le -1 du $(x - 1)$ va donner $2x^3$; comme on veut $2x^3$ dans P , il ne manque rien et le produit du x de $(x - 1)$ par le terme en x^2 de $Q(x)$ doit donner $0x^3$; on complète donc la factorisation :

$$x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x^4 - 2x^3 + 0x^2 + \dots).$$

- Ce $0x^2$ de $Q(x)$ ne fournit donc aucun terme en x^2 quand on le multiplie par le -1 du $(x - 1)$; le terme x^2 de $P(x)$ provient donc du produit du x de $(x - 1)$ par le terme en x de $Q(x)$; la ligne de factorisation devient alors :

$$x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x^4 - 2x^3 + x + \dots).$$

- Ce x de $Q(x)$ multiplié par le -1 du $(x - 1)$ fournit $-x$ au produit. Comme il faut avoir $-2x$, le terme constant de $Q(x)$ doit être -1 pour fournir le $-x$ qui manque, par multiplication avec le terme en x de $Q(x)$ et l'on a :

$$x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x^4 - 2x^3 + x - 1).$$

- On vérifie alors que le produit des termes constants donne bien le terme constant de P , qui vaut 1 dans le cas présent.

Évidemment il est tentant de calculer directement le terme constant puisque c'est immédiat – et cela peut être utile dans certains cas où l'on est pressé – mais il est quand-même préférable de calculer les termes dans l'ordre décroissant pour se garder la vérification finale.

Rédaction Aucune des explications données ci-dessus ne doit figurer sur une copie puisqu'il s'agit d'un simple calcul. On y verra donc seulement ce qui suit.

En mettant $(x - 1)$ en facteur, on obtient :

$$x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x^4 - 2x^3 + x - 1)$$

Je vous promets, qu'avec un peu d'entraînement, la méthode précédente est en général la méthode de loin la plus efficace pour factoriser $(x - a)$ dans une fonction polynomiale, même si dans l'exemple précédent, on peut (avec un peu d'habitude du calcul) aller un peu plus vite comme on peut le voir dans l'exercice suivant.

[www](#) **Ex 28 :** Donner une autre méthode de calcul pour mettre $(x - 1)$ en facteur dans :

$$P(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x + 1.$$

Indication : on voit que $(x - 1)$ est en facteur dans une partie de P .

p.40

[www](#) **Ex 29 :** Soit P défini par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 4x - 5$.

1. Vérifier que P possède une racine entière a .
2. Mettre $(x - a)$ en facteur dans l'expression de P .

p.41

IV. Formule du binôme (hors programme TS)

Dans cette section, nous allons nous intéresser à la formule du binôme de Newton qui permet de développer des quantités telles que :

$$(a + b)^n \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R} \quad b \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Cette formule très utile, qui a récemment disparu du programme de TS, ne présentant pas de gros problème de compréhension, nous pouvons très bien nous permettre ce petit hors-programme.

1. Développement des puissances d'un binôme

Dans toute cette partie,

- n est un entier naturel non nul,
- a et b désignent deux nombres réels.

Remarque Si vous connaissez les nombres complexes, vous pourrez facilement vérifier que tous les résultats sont encore valables lorsque a et b sont complexes.

Vous connaissez tous les relations :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{et} \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

même si cet ensemble de formules est redondant puisque la seconde se déduit évidemment de la première en changeant b en $-b$.

Développement de $(a + b)^3$

www **Ex 30 :** Donner l'expression développée de $(a + b)^3$. p.41

Remarque Même si la formule précédente rentre dans le cadre général qui va suivre, il est bon de savoir l'écrire sans hésitation et sans avoir à y passer dix minute pour cause d'application de la formule générale que nous allons voir. Vous pourriez la réécrire de mémoire pour voir ?

www **Ex 31 :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer de deux façons différentes :

$$\sum_{k=0}^n ((k + 1)^3 - k^3)$$

et retrouver directement une expression simplifiée de $\sum_{k=0}^n k^2$. p.42

Développement de $(a + b)^4$

www **Ex 32 :** Donner l'expression développée de $(a + b)^4$. p.42

Étude du cas général

D'après ce qui précède, nous pouvons donc affirmer que, pour chaque $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, il existe une famille de $n + 1$ entiers naturels permettant de développer $(a + b)^n$.

Si nous rassemblons ces coefficients dans un tableau, nous obtenons :

n	k	0	1	2	3	4	
1		1	1				$(a + b)^1 = 1 a + 1 b$
2		1	2	1			$(a + b)^2 = 1 a^2 + 2 a b + 1 b^2$
3		1	3	3	1		$(a + b)^3 = 1 a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + 1 b^3$
4		1	4	6	4	1	$(a + b)^4 = 1 a^4 + 4 a^3 b + 6 a^2 b^2 + 4 a b^3 + 1 b^4$

Afin de pouvoir compléter cette étude (et donc ce tableau) pour d'autres valeurs de n , nous allons repérer chacun des ces coefficients, à l'aide de deux index :

- le premier, n , pour repérer la ligne où il se trouve
- le second, k , pour repérer la colonne où il se trouve, avec bien sûr $0 \leq k \leq n$.

Ainsi, nous noterons $\lambda_{n,k}$ le coefficient se trouvant à l'intersection de la ligne n et de la colonne k avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On aura donc par exemple :

$$\lambda_{3,0} = 1, \quad \lambda_{3,2} = 3, \quad \lambda_{4,2} = 6 \quad \text{et} \quad \lambda_{4,4} = 1.$$

Avec ces notations, nous pouvons donc affirmer que, pour chaque $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, il existe une famille de $n + 1$ entiers naturels :

$$\lambda_{n,0}, \lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,n-1}, \lambda_{n,n}$$

tels que :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} a^{n-k} b^k.$$

Remarque Le symbole λ , qui est une lettre grecque se lisant « lambda », s'utilise souvent en mathématiques. Si vous n'êtes pas familier avec l'alphabet grec, je vous conseille vivement de visiter [<ce site>](#).

[www](#) **Ex 33 :** Développer $(a + b)^5$ et en déduire la cinquième ligne du tableau.
Expliquer comment cette ligne peut se déduire de la quatrième. p.43

En fait, le résultat de l'exercice précédent se généralise pour n quelconque.

Lemme 5

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une famille de $n + 1$ entiers naturels $\lambda_{n,0}, \lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,n-1}, \lambda_{n,n}$ tels que :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} a^{n-k} b^k.$$

Plus précisément, pour tout $n \geq 1$, nous avons :

$$\lambda_{n+1,0} = \lambda_{n+1,n+1} = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \lambda_{n+1,k} = \lambda_{n,k} + \lambda_{n,k-1}.$$

[www](#) **Ex 34 :** Justifier ce résultat en vous inspirant des calculs précédents. p.44

Bien que rigoureusement démontré et ayant valeur de résultat à part entière, l'énoncé précédent a été qualifié de « lemme », parce que c'est juste un intermédiaire qui va nous servir à démontrer l'essentiel : la formule du binôme. Ce qu'il faut connaître, c'est la formule du binôme et pas ce « lemme ».

www

Ex 35 : Soit n un entier naturel donné. En utilisant la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = (1 + x)^n,$$

montrer l'unicité de la famille des $\lambda_{n,k}$.

Prouver ensuite que l'on a : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad \lambda_{n,k} = \lambda_{n,n-k}$.

p.45

Remarque syntaxique Maintenant que nous avons démontré son unicité, nous pourrons donc parler de *la* (article défini) famille $\lambda_{n,k}$ des coefficients permettant de développer $(a + b)^n$ alors que jusqu'à présent nous devions nous limiter à parler d'*une* (article indéfini) famille de coefficients permettant de développer $(a + b)^n$. Il faut toujours prendre garde à ce que l'utilisation d'un article défini (*le, la, les*) suppose et/ou entraîne l'unicité chose désignée.

2. Triangle de Pascal et formule du binôme

D'après ce qui précède, et en particulier la démonstration du lemme précédent, les coefficients $\lambda_{n,k}$ que nous avons introduits vérifient :

$$\lambda_{1,0} = \lambda_{1,1} = 1$$

et pour $n \geq 1$:

$$\lambda_{n+1,0} = \lambda_{n+1,n+1} = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \lambda_{n+1,k} = \lambda_{n,k} + \lambda_{n,k-1}.$$

On peut donc calculer ces coefficients en les rangeant dans un tableau généralisant celui de la page 16, chaque ligne se déduisant de la précédente selon le schéma :

$$\begin{array}{ccc} \lambda_{n,k-1} & + & \lambda_{n,k} \\ & & \downarrow \\ & & \lambda_{n+1,k} \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} \text{sauf évidemment pour} \\ \text{les coefficients extrêmes} \\ \text{qui sont égaux à 1} \end{array} \right)$$

Vous avez déjà rencontré ce tableau de coefficients en probabilités.

- C'est le **triangle de Pascal** (même s'il était connu et utilisé bien avant Pascal : voir par exemple l'article du Wiki qui lui est consacré).
- Les éléments de ce tableau sont les **coefficients binomiaux** ; maintenant vous devez mieux comprendre l'origine de cette dénomination : ils permettent de développer les puissances du binôme $(a + b)$.

Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $\lambda_{n,k} = \binom{n}{k}$, et le résultat du lemme précédent s'écrit donc « plus naturellement » comme suit.

Proposition 6 (Formule du binôme de Newton)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, on a :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Méthode Si, un jour, un doute survient lors de l'écriture de cette formule, ne pas hésiter à la vérifier avec les cas particuliers connus $n = 2$ et/ou $n = 3$.

Remarque Si vous connaissez les nombres complexes, il est évident (vu les démonstrations précédentes) que cette formule reste valable lorsque $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$.

www **Ex 36 :** Remarquer l'homogénéité de la formule. Au fait que signifie cela ? p.45

Remarques

- Le symbole $\binom{n}{p}$ se lit « p parmi n ».
- Au lieu de $\binom{n}{p}$, dans de vieilles publications, on peut aussi trouver C_n^p .

Au passage Signalons qu'il est inutile d'apprendre par cœur la relation de Pascal :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \downarrow \binom{n+1}{k}$$

puisqu'elle se « voit » sur le schéma (cf. ci-contre) permettant de construire le triangle de Pascal.

Retour sur le triangle de Pascal

Vous avez certainement remarqué que ce que l'on appelle triangle de Pascal n'est pour l'instant pas vraiment un triangle vu qu'il lui manque « la pointe supérieure ».

On complète cette lacune en définissant :

$$\binom{0}{0} = 1,$$

ce qui donne un vrai triangle dont les premières lignes sont écrites ci-contre

n	k	0	1	2	3	4	5
	0	1					
	1	1	1				
	2	1	2	1			
	3	1	3	3	1		
	4	1	4	6	4	1	
	5	1	5	10	10	5	1

On peut alors remarquer qu'avec cette définition, $\binom{0}{0} = 1$, la formule du binôme de Newton devient valable même au rang $n = 0$ puisque :

$$(a + b)^0 = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^0 = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1.$$

Même si l'écriture de la formule du binôme de Newton au rang $n = 0$ ne présente guère d'intérêt calculatoire, cela évite d'étudier des cas particuliers comme dans la partie suivante.

Culture générale En dénombrement, $\binom{n}{p}$ est aussi égal au nombre de parties (ou de sous-ensembles) à p éléments d'un ensemble possédant n éléments. Voilà pourquoi il est tout à fait naturel de poser $\binom{0}{0} = 1$ vu que l'ensemble vide, qui a 0 éléments, possède une et une seule partie à 0 éléments qui est l'ensemble vide.

3. Expression des coefficients binomiaux

Dans ce qui précède, nous avons utilisé les coefficients binomiaux pour écrire la formule du binôme de Newton mais, pour l'instant, la seule méthode dont nous disposons pour déterminer ces coefficients et d'utiliser le triangle de Pascal.

Ce n'est pas ce qu'il y a de plus efficace, surtout si l'on n'a besoin que d'une seule ligne de coefficients, comme par exemple pour développer $(a + b)^7$:

- a priori, il y a alors 8 coefficients à expliciter ;
- mais vu la symétrie que l'on a justifiée dans l'exercice 35, il n'y a en fait que 4 coefficients à calculer ;
- vous imaginez la perte de temps s'il faut écrire 7 lignes du triangle de Pascal ?

Nous allons ici donner des moyens de calculer directement $\binom{n}{k}$ en fonction n et de k .

Première expression

Lemme 7

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \times \binom{n-1}{k-1}.$$

www

Ex 37 : (Démonstration du lemme précédent)

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = (1 + x)^n.$$

1. Développer $f_n(x)$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.
2. Donner deux expressions de f'_n et conclure.

p.46

Proposition 8

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times \cdots \times 1}.$$

Remarque Comme pour les sommes, les écritures $n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)$ et $k \times (k-1) \times \dots \times 1$ peuvent laisser supposer qu'il y a au moins trois éléments dans chaque produit mais, par convention (comme pour les sommes) :

- si $k = 1$, alors :

$$\frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times \dots \times 1} \text{ représente } \frac{n}{1} = n ;$$

- si $k = 2$, alors :

$$\frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times \dots \times 1} = \frac{n \times (n-1)}{2 \times 1} \text{ représente } \frac{n \times (n-1)}{2}.$$

En revanche, une telle expression ne peut *a priori* pas s'écrire lorsque $k = 0$. Toutefois, dans ce cas, on a déjà vu que $\binom{n}{0} = 1$.

www **Ex 38 :** Démontrer le résultat de la proposition précédente. p.47

Méthode Il ne faut surtout pas apprendre bêtement la formule de la proposition précédente : il suffit de remarquer que le numérateur et le dénominateur de $\binom{n}{k}$ contiennent k facteurs, le numérateur commençant à n et le dénominateur à k .

$$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}^{k \text{ termes}}}{\underbrace{k \times (k-1) \times \dots \times 1}_{k \text{ termes}}}$$

C'est pour qu'il y ait autant de termes au numérateur et au dénominateur que l'on a laissé le dernier facteur 1 qui, autrement, ne sert à rien !

Exemple Pour $\binom{20}{3}$, on utilise 3 termes numérateur et au dénominateur, et donc :

$$\binom{20}{3} = \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1} = 20 \times 19 \times 3 = 1140.$$

www **Ex 39 :** Calculer $\binom{10}{4}$ et $\binom{10}{8}$. p.47

En utilisant cette écriture de $\binom{n}{k}$, il est facile de visualiser la formule du lemme 7 :

$$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}^{k \text{ termes}}}{\underbrace{k \times (k-1) \times \dots \times 1}_{k \text{ termes}}} = \frac{n}{k} \times \frac{\overbrace{(n-1) \times \dots \times (n-k+1)}^{k-1 \text{ termes}}}{\underbrace{(k-1) \times \dots \times 1}_{k-1 \text{ termes}}} = \frac{n}{k} \times \binom{n-1}{k-1}$$

ce qui peut permettre de l'assurer un jour où vous en aurez besoin.

www

Ex 40 : Imaginons que l'on veuille développer $(a + b)^6$.

1. Combien de termes y a-t-il dans le développement de $(a + b)^6$?
2. Combien y a-t-il de nombres dans le triangle de Pascal jusque $n = 6$?
3. En fait combien y a-t-il vraiment de $\binom{6}{k}$ à calculer ?

Donner le développement de $(a + b)^6$.

p.47

Notation factorielle

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, au dénominateur de la formule :

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times \dots \times 1},$$

on trouve le produit des k premiers entiers naturels non nuls.

Définition 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le produit des n premiers entiers naturels non nuls se note $n!$, qui se lit « factorielle n » ou encore « n factorielle ».

Les premières valeurs de $n!$ sont données dans le tableau ci-contre. Vous pouvez facilement vérifier.

Par convention, on pose $0! = 1$.

Culture générale Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $n!$ est égal au nombre de permutations de n objets distincts, par exemple les n éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

n	$n!$
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720

Une expression plus compacte de $\binom{n}{k}$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, avec la notation factorielle, on peut déjà écrire :

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k!} \quad (i)$$

mais on peut encore faire plus compact en multipliant numérateur et dénominateur par $(n-k)!$ puisque :

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) \times (n-k)!$$

est égal à :

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) \times (n-k) \times \cdots \times 1 = n!$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Remarques

- L'écriture ci-dessus ne pose aucun problème lorsque $k = n$ puisque l'on a posé par convention $0! = 1$.
- L'avantage de cette dernière écriture est non seulement sa compacité mais aussi le fait qu'elle reste valable même pour $k = 0$: en effet, toujours grâce à la convention $0! = 1$, on a bien :

$$\frac{n!}{0!n!} = 1 = \binom{n}{0}.$$

- En fin elle est aussi valable pour $n = 0$ et donc $k = 0$ puisque :

$$\frac{0!}{0!0!} = 1 = \binom{0}{0}.$$

On en déduit le résultat suivant.

Proposition 9

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (ii)$$

Remarque Quand vous avez besoin d'utiliser une valeur de $\binom{n}{k}$, il faut immédiatement penser à l'une et/ou l'autre des deux expressions (i) et (ii) ci-dessus.

Avec un peu d'entraînement, le passage de l'une à l'autre doit se faire instantanément, et de tête, ce qui permet de pouvoir utiliser *automatiquement*, (c'est indispensable) celle qui se prête le mieux au problème à traiter.

- C'est une mauvaise politique que de ne retenir (par cœur) que l'une ou l'autre de ces deux formules en se disant que l'on pourra toujours si nécessaire, ou si l'examineur insiste, commencer à réfléchir pour voir comment on pourrait essayer de retrouver l'autre formule ... (je sais, j'ai fait exprès de rajouter des détours dans la phrase précédente, mais peut-être ainsi traduit-elle bien votre état d'esprit sur la question).
- Il faut au contraire apprendre à jongler avec les différentes formes, non pas en les apprenant par cœur, mais en les utilisant et en sachant rapidement passer de l'une à l'autre. Comment avoir l'idée d'utiliser telle ou telle forme ou savoir la repérer dans un calcul si elle ne se présente pas spontanément et naturellement à votre esprit ?

Méthode de travail

- Dès que vous allez commencer à travailler et que vous aurez besoin d'une de ces formules, il faut directement essayer de l'écrire sur votre brouillon sans aller la chercher dans les pages précédentes de ce chapitre (imaginez que vous êtes en temps limité et que vous n'avez pas accès aux documents).
- Même si vous avez un doute (et c'est légitime dans un premier temps), ne vous ruez surtout pas sur une page où cette formule est écrite, et encore moins sur formulaire, car vous ne feriez que du « copier-collé » et la formule n'aurait aucune chance de s'imprimer durablement dans votre cerveau.
- Si vous hésitez, il ne s'agit pas non plus de tirer à pile ou face pour sortir coûte que coûte une formule au hasard ; cela n'apporte rien. En revanche, essayez de réfléchir à la façon dont cette formule a été introduite, de revoir la démarche qui a permis de la justifier, de penser à quelques exemples, de vérifier ce que vous avez écrit dans quelques cas (très) simples, ce que vous pourrez faire même en temps limité et sans document.
- Évidemment vous risquez ainsi de commettre certaines des erreurs, mais toute erreur à ce niveau se révélera bénéfique si vous en analysez vraiment les causes. Il est des erreurs que l'on doit commettre un jour ou l'autre, et mieux vaut le plus tôt possible. C'est ainsi que vous assimilerez le mieux ces formules (et toutes les autres d'ailleurs), même si vous avez parfois l'impression au début d'y passer beaucoup de temps.

[www](#)

Ex 41 : À titre d'exercice, donner une autre justification de la relation de Pascal en utilisant l'écriture compacte avec les factorielles.

p.48

V. Pour finir, quelques exercices

1. Dans le domaine des nombres réels

www **Ex 42 :** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$. p.48

www **Ex 43 :** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $A_n = \sum_{k=1}^n (k+n)^2$. p.50

www **Ex 44 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Simplifier $S_1 = \sum_{k=0}^n 3^k \binom{n}{k}$.

2. En déduire $S_2 = \sum_{k=1}^n 3^{k-1} \binom{n}{k}$. p.50

www **Ex 45 :** En utilisant $\sum_{k=0}^n ((k+1)^4 - k^4)$, montrer directement que :

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \quad \text{p.50}$$

www **Ex 46 :** Soit n un entier naturel non nul.

1. Simplifier $A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ ainsi que $B_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$.

2. On suppose que n est pair et l'on pose $n = 2m$. Simplifier :

$$C_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{2m}$$

ainsi que :

$$D_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots + \binom{n}{2m-1}.$$

3. Donner des relations analogues sans l'hypothèse n pair. p.51

2. Pour ceux qui connaissent les complexes

www

Ex 47 :

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, exprimer de deux façons $(\cos t + i \sin t)^5$.
2. En déduire une fonction polynomiale $P \in \mathbb{R}[x]$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \cos 5t = P(\cos t).$$

3. Vérifier qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) - 1 = (x - 1)Q(x)$$

puis expliciter un tel polynôme Q .

p.52

www

Ex 48 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$S_n(x) = 1 - \binom{2n}{2} x^2 + \binom{2n}{4} x^4 - \cdots + (-1)^n \binom{2n}{2n} x^{2n}.$$

1. Exprimer $S_n(x)$ à l'aide d'un Σ .
2. Exprimer $S_n(x)$ en fonction de $(1 + ix)^{2n}$ et $(1 - ix)^{2n}$.
3. Pour tout $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, simplifier $S_n(\tan t)$.
4. En déduire les racines réelles de l'équation $S_n(x) = 0$.

p.53

VI. Solutions des exercices

Exercice 1 :

La première relation est vraie puisque :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) + \left(\sum_{k=1}^n b_k \right). \end{aligned}$$

La seconde relation est fautive pour $n \geq 2$ puisque, si l'on prend :

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1 \quad \text{et} \quad b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1,$$

alors on a :

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n b_k = n$$

et donc :

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \times \left(\sum_{k=1}^n b_k \right) = n^2$$

alors que :

$$\sum_{k=1}^n (a_k b_k) = n.$$

Ces quantités sont évidemment différentes puisque $n \neq 0$ et $n \neq 1$.

Exercice 2 :

1. Par définition, on a :

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{\ell=1}^n a_\ell.$$

2. La première relation est vraie puisque :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (r a_k) &= (r a_1) + (r a_2) + \cdots + (r a_n) \\ &= r (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\ &= r \left(\sum_{k=1}^n a_k \right). \end{aligned}$$

- Pour dérouler le calcul précédent, on a mis r en facteur dans chaque terme.
- Si on remonte ce calcul, on utilise ce que l'on appelle la distributivité de l'addition par rapport à la multiplication.

Ce sont deux facettes d'une même réalité.

La bonne seconde relation est :

$$\sum_{k=1}^n (r + a_k) = nr + \sum_{k=1}^n a_k,$$

puisque :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (r + a_k) &= (r + a_1) + \cdots + (r + a_n) \\ &= nr + (a_1 + \cdots + a_n) \\ &= nr + \sum_{k=1}^n a_k. \end{aligned}$$

3. Dans un tel cas, il ne faut surtout pas remplacer k par r car, si on le fait, on obtient :

$$\sum_{r=1}^n (r a_r) = 1 a_1 + 2 a_2 + \cdots + n a_n$$

ce qui n'a absolument rien à voir avec :

$$\sum_{k=1}^n (r a_k) = r a_1 + r a_2 + \cdots + r a_n.$$

Exercice 3 :

- Si l'on suppose $p = 1$ ou $n = 1$, alors la relation :

$$\sum_{k=1}^n a_k^p = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^p$$

est évidemment vraie. Mais cela est vraiment de peu d'intérêt.

- Supposons $p \geq 2$ et $n \geq 2$. Si l'on prend :

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad \dots, \quad a_n = 1,$$

on a :

$$\sum_{k=1}^n a_k^p = n$$

alors que :

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^p = n^p.$$

Vérifions par l'absurde que ces deux quantités sont différentes. Supposons :

$$0 = n^p - n = n(n^{p-1} - 1).$$

Alors, comme $n > 0$, on en déduit :

$$n^{p-1} = 1,$$

ce qui est impossible puisque $p - 1 \geq 1$ et $n \geq 2$.

Exercice 4 :

1. Une suite arithmétique est définie par son premier terme $a \in \mathbb{R}$ et sa raison $r \in \mathbb{R}$.

Si l'on note u ou encore $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une telle suite, alors on a :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad u_k = a + k r,$$

mais aussi :

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad u_{k+1} = u_k + r$$

ou encore :

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad u_k = u_{k-1} + r.$$

Remarque Dès que l'on vous parle d'une suite arithmétique, il est indispensable de penser à ces diverses caractérisations afin de toujours pouvoir utiliser la plus adéquate.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\begin{array}{cccccccc} S_n & = & u_0 & + & u_1 & + & \cdots & + & u_{n-1} & + & u_n \\ & & | & & | & & & & | & & | \\ S_n & = & u_n & + & u_{n-1} & + & \cdots & + & u_1 & + & u_0 \end{array}$$

Comme, dans chaque colonne, la somme $u_k + u_{n-k}$ est constante et vaut $u_0 + u_n$, en faisant la somme des deux lignes précédentes, on obtient :

$$2 S_n = (n + 1) (u_0 + u_n)$$

et donc :

$$S_n = \frac{(n + 1) (u_0 + u_n)}{2}.$$

Exercice 5 :

Considérons $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. En posant $k = n - \ell$, nous obtenons :

$$S_n = \sum_{\ell=0}^n u_{n-\ell} \quad \text{et donc} \quad S_n = \sum_{k=0}^n u_{n-k}.$$

On en déduit alors :

$$2 S_n = \sum_{k=0}^n u_k + \sum_{k=0}^n u_{n-k} = \sum_{k=0}^n (u_k + u_{n-k}).$$

Comme u est une suite arithmétique de raison r , on a :

$$u_k + u_{n-k} = (u_0 + k r) + (u_n - k r) = u_0 + u_n.$$

Il s'ensuit que :

$$2 S_n = \sum_{k=0}^n (u_0 + u_n) = (n + 1) (u_0 + u_n)$$

et donc que :

$$S_n = \frac{(n + 1) (u_0 + u_n)}{2}.$$

Remarque

- Le fond de cette seconde démonstration est exactement le même que celui de la première. Seule la présentation (le packaging) change.
- La première forme, certainement plus intuitive, est souvent celle qui permet de comprendre ce qui se passe. La seconde forme apparaît comme plus rigoureuse mais personne ne vous tiendra rigueur d'écrire la démonstration avec des points de suspension.
- En tout cas, il est préférable de voir une démonstration avec des points de suspension bien comprise plutôt qu'une démonstration écrite avec des Σ mais mal dominée.

Exercice 6 :

- Si l'on pose $k = n - \ell$ et donc $\ell = n - k$, alors :
 - * pour $k = 1$, on a $\ell = n - 1$;
 - * pour $k = n$, on a $\ell = 0$.

Ainsi, lorsque k varie de 1 à n , alors ℓ décroît de $n - 1$ à 0 ; on obtient donc :

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_{n-\ell}$$

puisque, par convention, la borne mise en bas du Σ est inférieure à celle mise en haut.

- Si l'on pose $k = n + 1 - \ell$ et donc $\ell = n + 1 - k$, alors :
 - * pour $k = 1$, on a $\ell = n$;
 - * pour $k = n$, on a $\ell = 1$.

Ainsi, lorsque k varie de 1 à n , alors ℓ décroît de n à 1 ; on obtient donc :

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{\ell=1}^n a_{n+1-\ell}$$

puisque, par convention, la borne mise en bas du Σ est inférieure à celle mise en haut.

Exercice 7 :

1. Une suite géométrique est définie par son premier terme $a \in \mathbb{R}$ et sa raison $r \in \mathbb{R}$. Si l'on note u ou encore $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une telle suite, alors on a :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad u_k = a r^k.$$

mais aussi :

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad u_{k+1} = r u_k$$

ou encore :

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad u_k = r u_{k-1}.$$

Dès que l'on vous parle d'une suite géométrique, il est indispensable de penser à ces diverses caractérisations afin de toujours pouvoir utiliser la plus adéquate.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n \\ r S_n &= u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1}. \end{aligned}$$

Par différence, on obtient :

$$(1 - r) S_n = u_0 - u_{n+1}.$$

• Si $r \neq 1$, on en déduit :

$$S_n = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1 - r} = u_0 \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

• Si $r = 1$, alors la suite u est constante et l'on a :

$$S_n = (n + 1) u_0.$$

Ne jamais oublier ce cas particulier !

Exercice 8 :

1. La liste qui nous intéresse :

$$a_p, a_{p+1}, \dots, a_q$$

peut être vue comme ce qui reste dans la liste :

$$a_0, a_1, \dots, a_q \quad \text{qui contient } q + 1 \text{ éléments}$$

après suppression de la liste :

$$a_0, a_1, \dots, a_{p-1} \quad \text{qui contient } p \text{ éléments.}$$

Donc la liste qui nous intéresse contient $q + 1 - p$ éléments.

2. On a :

$$\sum_{k=0}^q a_k - \sum_{k=0}^p a_k = a_{p+1} + \cdots + a_q = \sum_{k=p+1}^q a_k.$$

3. On a :

$$\sum_{k=p}^q a_k = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q = \sum_{\ell=0}^{q-p} a_{p+\ell}.$$

Exercice 9 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. On a alors :

$$r S_n = r \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n r u_k = \sum_{k=0}^n u_{k+1}$$

En écrivant :

$$\sum_{k=0}^n u_{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=1}^n u_k \right) + u_{n+1},$$

et

$$S_n = u_0 + \sum_{k=1}^n u_k$$

par différence, on obtient :

$$(1-r)S_n = u_0 - u_{n+1}$$

et l'on termine alors comme avec la première méthode.

Exercice 10 :

Si l'on pose $\ell = p + q - k$, alors :

- on a $k = p + q - \ell$ et donc $a_k = a_{p+q-\ell}$;
- lorsque k varie de p à q , alors ℓ décroît de q à p et l'on obtient donc :

$$\sum_{k=p}^q a_k = \sum_{\ell=p}^q a_{p+q-\ell}$$

puisque, par convention, la borne mise en bas du Σ est inférieure à celle mise en haut.

Exercice 11 :

Posons $S_{p,q} = \sum_{k=p}^q u_k$. Avec le changement d'index $\ell = p + q - k$, on obtient :

$$S_{p,q} = \sum_{\ell=p}^q u_{p+q-\ell} = \sum_{k=p}^q u_{p+q-k}.$$

On en déduit alors :

$$2S_{p,q} = \sum_{k=p}^q u_k + \sum_{k=p}^q u_{p+q-k} = \sum_{k=p}^q (u_k + u_{p+q-k}).$$

Comme u est une suite arithmétique, on a :

$$u_k + u_{p+q-k} = u_p + u_q.$$

Il s'ensuit que :

$$2S_{p,q} = \sum_{k=p}^q (u_p + u_q) = (q - p + 1)(u_p + u_q)$$

et donc que :

$$\sum_{k=p}^q u_k = (q - p + 1) \frac{(u_p + u_q)}{2}.$$

Ainsi, on peut donc retenir que la somme $\sum_{k=p}^q u_k$ est égale au produit du nombre de termes par la demi somme des termes extrêmes.

Exercice 12 :

En mettant 2 en facteur, on obtient :

$$\sum_{k=1}^n 2k = 2 \sum_{k=1}^n k = 2 \frac{n(n+1)}{2}$$

et donc :

$$\sum_{k=1}^n 2k = n(n+1).$$

Exercice 13 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le changement d'index $\ell = k + n$ donne :

$$A_n = \sum_{k=0}^n (k+n) = \sum_{\ell=n}^{2n} \ell.$$

Ainsi, A_n est la somme de $n+1$ termes d'une suite arithmétique de premier terme n et de dernier terme $2n$; donc :

$$A_n = (n+1) \frac{n+2n}{2} = \frac{3n(n+1)}{2}.$$

Exercice 14 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^n (nk) = n \sum_{k=1}^n k = \frac{n^2(n+1)}{2}$.

Exercice 15 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrons par récurrence :

$$H_n : \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- Pour $n = 1$, on a évidemment $\sum_{k=1}^1 k^2 = 1 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que H_n soit vrai. On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n+1}{6} (n(2n+1) + 6(n+1)) \\ &= \frac{n+1}{6} (2n^2 + 7n + 6) \\ &= \frac{n+1}{6} (2n+3)(n+2). \end{aligned}$$

D'où H_{n+1} puisque $(n+1)(n+2)(2n+3)$ s'écrit :

$$(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1).$$

On en déduit que le résultat d'après le principe de récurrence.

Remarques sur les cinq lignes du calcul précédent

- Il ne faut rien écrire de plus dans le calcul précédent : en particulier, dans le passage de la troisième à la quatrième ligne, surtout ne pas écrire le développement des deux produits ; il faut le faire de tête.
- Si le passage de l'avant-dernière à la dernière ligne vous semble miraculeux ou pas évident, c'est que vous avez oublié le but : il suffit d'écrire H_{n+1} pour le voir. Comme n'importe qui est capable de développer ce produit de tête, inutile d'en mettre plus.

Exercice 16 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, démontrons par récurrence :

$$H_n : \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

- Pour $n = 1$, on a évidemment : $\sum_{k=1}^1 k^3 = 1 = \frac{1^2 \times 2^2}{4}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que H_n soit vrai. On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} (n^2 + 4(n+1)) \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \end{aligned}$$

ce qui prouve H_{n+1} et termine la démonstration de la récurrence.

Exercice 17 :

En prenant $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a :

$$A^2 = A A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$B^2 = B B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit :

$$A^2 - B^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors que :

$$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq A^2 - B^2.$$

Remarque C'est parce que $AB \neq BA$ que l'on a :

$$A^2 - B^2 \neq (A+B)(A-B).$$

Exercice 18 :

On a :

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3.$$

On en déduit :

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Exercice 19 :

En changeant b en $-b$ dans la relation :

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2),$$

on obtient :

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

Il est donc inutile de retenir une nouvelle relation.

Exercice 20 :

En remplaçant b par ib dans l'identité :

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$

on obtient :

$$(a-ib)(a+ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2.$$

On utilise quand-même cela moins souvent que le changement de b en $-b$ dans $a^3 + b^3$.

Exercice 21 :

Par distributivité, on obtient :

$$\begin{aligned} (a-b) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \right) &= a \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \right) - b \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}. \end{aligned}$$

Si, dans la première somme, on pose $\ell = k + 1$ et donc $k = \ell - 1$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} = \sum_{\ell=1}^n a^{\ell} b^{n-\ell}.$$

Comme k et ℓ sont des variables muettes, on a :

$$\sum_{\ell=1}^n a^{\ell} b^{n-\ell} = \sum_{k=1}^n a^k b^{n-k}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} (a-b) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \right) &= \sum_{k=1}^n a^k b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} a^k b^{n-k} + a^n \right) - \left(b^n + \sum_{k=1}^{n-1} a^k b^{n-k} \right) \end{aligned}$$

et donc :

$$(a-b) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \right) = a^n - b^n.$$

Exercice 22 :

Supposons n impair et posons $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

Si dans la formule :

$$a^{2p+1} - b^{2p+1} = (a-b) \left(\sum_{k=0}^{2p} a^{2p-k} b^k \right)$$

on remplace b par $-b$, on obtient :

$$\begin{aligned} a^{2p+1} + b^{2p+1} &= a^{2p+1} - (-b)^{2p+1} \\ &= (a+b) \left(\sum_{k=0}^{2p} a^{2p-k} (-b)^k \right) \\ &= (a+b) \left(\sum_{k=0}^{2p} (-1)^k a^{2p-k} b^k \right). \end{aligned}$$

Exercice 23 :

1. Comme la relation $\sum_{k=0}^n p_k x^k = 0$ est vraie pour tout réel x , on peut y remplacer x par 0 ; on obtient alors directement $p_0 = 0$.
2. Comme $p_0 = 0$, l'hypothèse devient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 = \sum_{k=1}^n p_k x^k = x \sum_{k=1}^n p_k x^{k-1},$$

on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \sum_{k=1}^n p_k x^{k-1} = 0, \quad (*)$$

Comme la fonction polynomiale :

$$\begin{aligned} Q : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{k=1}^n p_k x^{k-1} \end{aligned}$$

est continue, il suffit alors de faire tendre x vers 0 dans (*) pour obtenir :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=1}^n p_k x^{k-1} = 0.$$

3. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété H_n :

Si p_0, p_1, \dots, p_n est une famille de $n + 1$ éléments de \mathbb{R} tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^n p_k x^k = 0,$$

alors, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $p_k = 0$.

- Pour $n = 0$, si l'on suppose que p_0 est une famille d'un seul élément tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad p_0 = 0,$$

alors il est alors immédiat que $p_0 = 0$. On en déduit que H_0 est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que H_{n-1} est vraie. Montrons que H_n est vraie. Considérons donc une famille p_0, p_1, \dots, p_n de $n + 1$ éléments de \mathbb{R} tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^n p_k x^k = 0,$$

D'après la première question, on a $p_0 = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=1}^n p_k x^{k-1} = 0,$$

ou encore :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1} x^k = 0.$$

D'après l'hypothèse H_{n-1} , on en déduit :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad p_{k+1} = 0 \quad \text{ou encore} \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad p_k = 0.$$

Comme on a déjà prouvé $p_0 = 0$, on en déduit H_n , ce qui termine la démonstration par récurrence.

Exercice 24 :

Démontrons le résultat annoncé par l'absurde. Supposons donc qu'il existe une famille p_0, p_1, \dots, p_n de $n + 1$ réels non tous nuls tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^n p_k x^k = 0.$$

Désignons par r le plus petit des entiers k tels que $p_k \neq 0$, ce qui s'écrit encore :

$$r = \min \{ k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid p_k \neq 0 \}.$$

On a donc alors :

$$\sum_{k=0}^n p_k x^k = \sum_{k=r}^n p_k x^k = x^r \sum_{k=r}^n p_k x^{k-r} \quad \text{avec} \quad p_r \neq 0. \quad (*)$$

De l'hypothèse :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^n p_k x^k = 0,$$

on déduit alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \sum_{k=r}^n p_k x^{k-r} = 0.$$

En faisant tendre x vers 0 dans cette dernière égalité, on obtient $p_r = 0$, ce qui est contradictoire avec (*) et termine la démonstration.

Exercice 25 :

Considérons que deux familles p_0, p_1, \dots, p_n et q_0, q_1, \dots, q_n de réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^n p_k x^k = \sum_{k=0}^n q_k x^k.$$

Par différence, on en déduit immédiatement :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^n (p_k - q_k) x^k = 0.$$

En appliquant le résultat de la proposition précédente, on obtient :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad p_k - q_k = 0$$

et donc :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad p_k = q_k.$$

Exercice 26 :

1. Il faut ici démontrer une équivalence et donc deux implications.

S'il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = (x - a)Q(x),$$

alors il suffit de remplacer x par a pour avoir $P(a) = 0$.

Remarque Ce n'est pas la partie la plus intéressante du résultat !

2. Réciproquement, supposons donc $P(a) = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x) - P(a) \\ &= \sum_{k=0}^n p_k x^k - \sum_{k=0}^n p_k a^k \\ &= \sum_{k=0}^n p_k (x^k - a^k) \\ &= \sum_{k=1}^n p_k (x^k - a^k) \end{aligned}$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$x^k - a^k = (x - a) \left(\sum_{\ell=0}^{k-1} a^{k-1-\ell} x^\ell \right).$$

En désignant par Q_k la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad Q_k(x) = \sum_{\ell=0}^{k-1} a^{k-1-\ell} x^\ell,$$

on a alors :

$$x^k - a^k = (x - a) Q_k(x)$$

et il est immédiat que :

$$P(x) = \sum_{k=1}^n p_k (x - a) Q_k(x) = (x - a) \sum_{k=1}^n p_k Q_k(x).$$

Si on pose alors :

$$Q = \sum_{k=1}^n p_k Q_k \quad (\text{égalité de fonctions}),$$

il est immédiat que $Q \in \mathbb{R}[x]$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = (x - a) Q(x),$$

ce qui termine la démonstration.

Exercice 27 :

1. Comme :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x + 1,$$

P est une fonction polynomiale vérifiant :

$$P(1) = 1 - 3 + 2 + 1 - 2 + 1 = 0.$$

D'après la proposition précédente, on en déduit qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = (x - 1) Q(x).$$

Remarque La détermination des coefficients de Q fait l'objet de la seconde question. J'espère que vous aviez lu tout l'énoncé avant de vous attaquer à la première question. C'est indispensable!

2. (a) Étant donné

(*) que la fonction polynomiale $x \rightarrow x - 1$ est de degré 1,

(*) que P est une fonction polynomiale de degré 5,

la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = (x - 1) Q(x)$$

entraîne que Q est une fonction polynomiale de degré 4; ainsi il existe donc des réels q_0, q_1, \dots, q_4 tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad Q(x) = q_4 x^4 + q_3 x^3 + q_2 x^2 + q_1 x + q_0.$$

- (b) En identifiant les coefficients des termes de degré 5 dans les deux membres de l'égalité $P(x) = (x - 1)Q(x)$, on trouve :

$$Q(x) = x^4 + \dots$$

- (c) En regardant les coefficients des termes en x^4 de l'égalité :

$$x^5 - 3x^4 \dots = (x - 1)(x^4 + q_3 x^3 + \dots),$$

on obtient :

$$-3 = q_3 - 1 \quad \text{et donc} \quad q_3 = -2.$$

- (d) En identifiant les coefficients des termes de degré 3 de :

$$x^5 - 3x^4 + 2x^3 + \dots = (x - 1)(x^4 - 2x^3 + q_2 x^2 + \dots),$$

on obtient :

$$2 = q_2 + 2 \quad \text{et donc} \quad q_2 = 0.$$

- (e) En identifiant les coefficients des termes de degré 2 de :

$$x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 + \dots = (x - 1)(x^4 - 2x^3 + q_1 x + \dots),$$

on obtient :

$$1 = q_1 + 0 \quad \text{et donc} \quad q_1 = 1.$$

En identifiant les coefficients des termes de degré 1 de :

$$x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x + \dots = (x - 1)(x^4 - 2x^3 + x + q_0),$$

on obtient :

$$-2 = q_0 - 1 \quad \text{et donc} \quad q_0 = -1$$

- (f) On peut alors vérifier l'égalité des termes constants dans :

$$x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x + 1 = (x - 1)(x^4 - 2x^3 + x - 1).$$

Il est indispensable de toujours faire cette vérification !

Exercice 28 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} P(x) &= x^5 - 3x^4 + 2x^3 + (x - 1)^2 \\ &= x^3(x^2 - 3x + 2) + (x - 1)^2. \end{aligned}$$

Comme $x^2 - 3x + 2$ a 1, et donc aussi 2, comme racine, on a :

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2),$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3(x - 1)(x - 2) + (x - 1)^2 \\ &= (x - 1)(x^4 - 2x^3 + x - 1). \end{aligned}$$

Exercice 29 :

- Si $a \in \mathbb{Z}$ vérifie $P(a) = 0$, alors :

$$a(a^3 - 6a^2 + 6a - 4) = 5.$$

Comme $a^3 - 6a^2 + 6a - 4$ est évidemment élément de \mathbb{Z} , on en déduit que a divise 5.
Par suite, on a :

$$a \in \{-1, 1, -5, 5\}.$$

Il est alors aisé (même sans calculatrice) de vérifier que 5 convient puisque :

$$\begin{aligned} P(5) &= 5^4 - 6 \times 5^3 + 6 \times 5^2 - 4 \times 5 - 5 \\ &= 5^4 - 6 \times 5^3 + 6 \times 5^2 - 5^2 \\ &= 5^4 - 6 \times 5^3 + 5^3 \\ &= 5^4 - 5^4 \\ &= 0. \end{aligned}$$

- La factorisation de $P(x)$ par $(x - 5)$ donne :

$$x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 4x - 5 = (x - 5)(x^3 - x^2 + x + 1).$$

Pour information, les résultats successifs sont :

$$\begin{aligned} x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 4x - 5 &= (x - 5)(x^3 + \dots) \\ &= (x - 5)(x^3 - x^2 + \dots) \\ &= (x - 5)(x^3 - x^2 + x + \dots) \\ &= (x - 5)(x^3 - x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

Exercice 30 :

En développant, on obtient :

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 \\ &= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ &\quad + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \end{aligned}$$

Exercice 31 :

- Première évaluation : une simplification « télescopique » donne :

$$\sum_{k=0}^n ((k+1)^3 - k^3) = \sum_{k=0}^n (k+1)^3 - \sum_{k=0}^n k^3 = (n+1)^3.$$

- On a donc :

$$\begin{aligned} (n+1)^3 &= \sum_{k=0}^n ((k+1)^3 - k^3) \\ &= \sum_{k=0}^n (3k^2 + 3k + 1) \\ &= 3 \sum_{k=0}^n k^2 + 3 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 \\ &= 3 \sum_{k=0}^n k^2 + 3 \frac{n(n+1)}{2} + (n+1). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} 3 \sum_{k=0}^n k^2 &= (n+1)^3 - 3 \frac{n(n+1)}{2} - (n+1) \\ &= \frac{(n+1)(2(n+1)^2 - 3n - 2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + n)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} \end{aligned}$$

et donc :

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 32 :

En développant, on obtient :

$$\begin{aligned} (a+b)^4 &= (a+b)(a+b)^3 \\ &= (a+b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \\ &= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 \\ &\quad + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4. \end{aligned}$$

Exercice 33 :

Comme précédemment, on peut écrire :

$$(a + b)^5 = (a + b)(a + b)^4.$$

En utilisant les $\lambda_{4,k}$, on a :

$$\begin{aligned} (a + b)^5 &= (a + b)(\lambda_{4,0} a^4 + \lambda_{4,1} a^3 b + \lambda_{4,2} a^2 b^2 + \lambda_{4,3} a b^3 + \lambda_{4,4} b^4) \\ &= \lambda_{4,0} a^5 + \lambda_{4,1} a^4 b + \lambda_{4,2} a^3 b^2 + \lambda_{4,3} a^2 b^3 + \lambda_{4,4} a b^4 \\ &\quad + \lambda_{4,0} a^4 b + \lambda_{4,1} a^3 b^2 + \lambda_{4,2} a^2 b^3 + \lambda_{4,3} a b^4 + \lambda_{4,4} b^5 \end{aligned}$$

Si l'on pose alors :

$$\lambda_{5,0} = \lambda_{4,0} \quad \lambda_{5,5} = \lambda_{4,4} \quad (i)$$

ainsi que :

$$\forall k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket \quad \lambda_{5,k} = \lambda_{4,k} + \lambda_{4,k-1} \quad (ii)$$

on a :

$$(a + b)^5 = \lambda_{5,0} a^5 + \lambda_{5,1} a^4 b + \lambda_{5,2} a^3 b^2 + \lambda_{5,3} a^2 b^3 + \lambda_{5,4} a b^4 + \lambda_{5,5} b^5,$$

ou encore :

$$(a + b)^5 = \sum_{k=0}^5 \lambda_{5,k} a^{5-k} b^k.$$

En utilisant les relation (i) et (ii), on peut alors compléter le tableau des coefficients :

n	k	0	1	2	3	4	5
1		1	1				
2		1	2	1			
3		1	3	3	1		
4		1	4	6	4	1	
5		1	5	10	10	5	1

Dans ce tableau, chaque ligne (à l'exception de la première) se déduit de la précédente en utilisant le schéma :

$$\begin{array}{ccc} \lambda_{n,k-1} & + & \lambda_{n,k} \\ & & \downarrow \\ & & \lambda_{n+1,k} \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} \text{sauf évidemment pour} \\ \text{les coefficients extrêmes} \\ \text{qui sont égaux à 1} \end{array} \right)$$

On a donc :

$$(a + b)^5 = a^5 + 5 a^4 b + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5 a b^4 + b^5.$$

Exercice 34 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit H_n la propriété :

Il existe $n + 1$ entiers naturels $\lambda_{n,0}, \lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,n}$ tels que :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} a^{n-k} b^k.$$

- H_1 est évidemment vraie puisque les entiers :

$$\lambda_{1,0} = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_{1,1} = 1$$

répondent évidemment au problème lorsque $n = 1$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit a et b deux réels. En supposant H_n , on a donc :

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n \\ &= (a + b) \left(\sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} a^{n-k} b^k \right). \end{aligned}$$

En développant, on obtient :

$$(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} a^{n-k} b^{k+1}.$$

Dans la seconde somme, le changement d'index $\ell = k + 1$ donne :

$$\sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{\ell=1}^{n+1} \lambda_{n,\ell-1} a^{n-\ell+1} b^\ell = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{n,k-1} a^{n-k+1} b^k.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_{n,k-1} a^{n-k+1} b^k \\ &= \lambda_{n,0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k-1} a^{n-k+1} b^k + \lambda_{n,n} b^{n+1} \\ &= \lambda_{n,0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n (\lambda_{n,k} + \lambda_{n,k-1}) a^{n+1-k} b^k + \lambda_{n,n} b^{n+1}. \end{aligned}$$

Si l'on pose alors :

$$\lambda_{n+1,0} = \lambda_{n,0} \quad \text{et} \quad \lambda_{n+1,n+1} = \lambda_{n,n}$$

ainsi que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \lambda_{n+1,k} = \lambda_{n,k} + \lambda_{n,k-1},$$

on obtient $n + 2$ entiers naturels $\lambda_{n+1,0}, \lambda_{n+1,1}, \dots, \lambda_{n+1,n+1}$ tels que :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad (a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_{n+1,k} a^{(n+1)-k} b^k,$$

ce qui prouve H_{n+1} et termine la démonstration par récurrence.

Exercice 35 :

- Considérons $\lambda_{n,0}, \dots, \lambda_{n,n}$ d'une part et $\lambda'_{n,0}, \dots, \lambda'_{n,n}$ d'autre part, deux familles de $n + 1$ entiers naturels tels que :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n \lambda'_{n,k} a^{n-k} b^k.$$

On a donc en particulier :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (1 + x)^n = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} x^k = \sum_{k=0}^n \lambda'_{n,k} x^k.$$

Ainsi, les deux fonctions polynomiales :

$$x \mapsto \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} x^k \quad \text{et} \quad x \mapsto \sum_{k=0}^n \lambda'_{n,k} x^k$$

sont égales ; par suite, elles ont les mêmes coefficients et donc :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad \lambda_{n,k} = \lambda'_{n,k}$$

ce qui démontre l'unicité attendue.

- En utilisant la formule donnant le développement de $(a + b)^n$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (1 + x)^n = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} x^k$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x + 1)^n = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} x^{n-k} = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,n-k} x^k.$$

Comme $(1 + x)^n = (x + 1)^n$, les deux fonctions polynomiales :

$$x \mapsto \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} x^k \quad \text{et} \quad x \mapsto \sum_{k=0}^n \lambda_{n,n-k} x^k$$

sont égales ; par suite, elles ont les mêmes coefficients et donc :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad \lambda_{n,k} = \lambda_{n,n-k}$$

ce qui prouve le résultat demandé.

Exercice 36 :

- D'une part, le membre de droite est homogène car c'est une combinaison linéaire de termes $a^p b^q$ qui sont globalement de même degré puisque $p + q = n$.
- D'autre part, si l'on remplace a par ta et b par tb alors les deux membres sont multipliés par t^n .

Ce genre de considération peut aider à la vérification des formules.

Exercice 37 :

1. La formule du binôme nous donne :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

2. En développant $(1+x)^n$ avec la formule du binôme, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k,$$

et on en déduit en dérivant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'_n(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k x^{k-1}. \quad (i)$$

Comme :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = (1+x)^n,$$

on obtient en dérivant sous cette forme :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'_n(x) = n(1+x)^{n-1}.$$

En développant $(1+x)^{n-1}$ avec la formule du binôme de Newton, on en déduit :

$$f'_n(x) = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} n \binom{n-1}{k} x^k.$$

En ré-indexant, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'_n(x) = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1}. \quad (ii)$$

Il suffit alors, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, d'identifier les coefficients de x^{k-1} des deux expressions polynomiales (i) et (ii), pour obtenir :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

Exercice 38 :

En écrivant la relation :

$$\binom{n-r}{k-r} = \frac{n-r}{k-r} \binom{n-r-1}{k-r-1}$$

pour r allant de 0 à $k-1$, on obtient :

$$\text{pour } r = 0 \quad : \quad \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \times \binom{n-1}{k-1}$$

$$\text{pour } r = 1 \quad : \quad \binom{n-1}{k-1} = \frac{n-1}{k-1} \times \binom{n-2}{k-2}$$

$$\text{pour } r = 2 \quad : \quad \binom{n-2}{k-2} = \frac{n-2}{k-2} \times \binom{n-3}{k-3}$$

⋮

$$\text{pour } r = k-2 \quad : \quad \binom{n-k+2}{2} = \frac{n-k+2}{2} \times \binom{n-k+1}{1}$$

$$\text{pour } r = k-1 \quad : \quad \binom{n-k+1}{1} = \frac{n-k+1}{1} \times \binom{n-k}{0}$$

En remplaçant chaque $\binom{n-r}{k-r}$ par son expression dans la ligne suivante, et sachant que $\binom{n-k}{0} = 1$, on en déduit :

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times \cdots \times 1}.$$

Exercice 39 :

- On a d'une part :

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 10 \times 3 \times 7 = 210.$$

- Pour le second on commence par se ramener à $k \leq \frac{n}{2}$, ce qui donne :

$$\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45.$$

Exercice 40 :

1. Pour n allant de 0 à 6, le triangle de Pascal contient 7 lignes.
2. le nombre total de coefficients pour écrire ces 7 lignes est donc :

$$1 + 2 + \cdots + 7 = \sum_{k=1}^7 k = 28.$$

3. Pour développer $(a + b)^6$, on a *a priori* besoin des 7 coefficients mais, en fait, il y en a juste 2 à calculer.

- Comme :

$$\binom{6}{k} = \binom{6}{6-k},$$

il suffit d'évaluer les valeurs de $\binom{6}{k}$ pour $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$.

- Les valeurs $\binom{6}{0} = 1$ et $\binom{6}{1} = 6$ car, pour tout n , on a : $\binom{n}{0}$ et $\binom{n}{1} = n$.

- Pour $k = 2$, on a :

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15.$$

- Pour $k = 3$, on a :

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3!} = 5 \times 4 = 20.$$

On a donc :

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

Exercice 41 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On a alors :

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}.$$

Une réduction au même dénominateur $k!(n-k)!$ donne :

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)! \times (n-k)}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)! \times k}{k!(n-k)!}.$$

et donc :

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} \left((n-k) + k \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

D'où le résultat.

Exercice 42 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En mettant $\frac{1}{n^3}$ en facteur, on a :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$$

et donc :

$$u_n = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

On en déduit :

$$u_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

En divisant numérateur et dénominateur par n^2 , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{(1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n})}{6}$$

et il est alors évident que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{3}.$$

Exercice 43 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une translation d'index donne :

$$A_n = \sum_{\ell=n+1}^{2n} \ell^2 = \sum_{k=n+1}^{2n} k^2.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=1}^{2n} k^2 - \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(2n+1)}{6} (2(4n+1) - (n+1)) \\ &= \frac{n(2n+1)(7n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Exercice 44 :

1. En utilisant la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$S_1 = \sum_{k=0}^n 3^k \binom{n}{k} = (3+1)^n$$

et donc

$$S_1 = 4^n.$$

2. On a évidemment :

$$3S_2 = \sum_{k=1}^n 3^k \binom{n}{k} = S_1 - 1$$

et donc :

$$S_2 = \frac{4^n - 1}{3}.$$

Exercice 45 :

D'une part, on a :

$$\sum_{k=0}^n ((k+1)^4 - k^4) = \sum_{k=0}^n (k+1)^4 - \sum_{k=0}^n k^4 = (n+1)^4.$$

Comme :

$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1,$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} (n+1)^4 &= \sum_{k=0}^n ((k+1)^4 - k^4) \\ &= 4 \sum_{k=0}^n k^3 + 6 \sum_{k=0}^n k^2 + 4 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1 \end{aligned}$$

et donc :

$$4 \sum_{k=0}^n k^3 = (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1).$$

ce qui donne :

$$4 \sum_{k=0}^n k^3 = n^2(n+1)^2 \quad \text{et donc} \quad \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Remarque Cette méthode peut se généraliser pour simplifier $S_{n,r} = \sum_{k=0}^n k^r$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}$. Il suffit d'exprimer de deux façons différentes

$$\sum_{k=0}^n \left((k+1)^{r+1} - k^{r+1} \right).$$

On obtient ainsi $S_{n,r}$ en fonction des précédents : $S_{n,r-1}, S_{n,r-2}, \dots$

Exercice 46 :

- On a immédiatement

$$A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0.$$

- On a :

$$C_n = \sum_{\ell=0}^m \binom{n}{2\ell} \quad \text{et} \quad D_n = \sum_{\ell=0}^{m-1} \binom{n}{2\ell+1}.$$

Il est alors immédiat que :

$$C_n + D_n = A_n = 2^n \quad \text{et} \quad C_n - D_n = B_n = 0.$$

- * Par somme on en déduit $2C_n = 2^n$ et donc :

$$C_n = 2^{n-1}.$$

- * Par différence on obtient $2D_n = 2^n$ et donc

$$D_n = 2^{n-1}.$$

Heureusement que l'on a supposé $n \geq 1$!

- Pour $x \in \mathbb{R}$, désignons par $[x]$ la partie entière de x c'est-à-dire le plus grand entier (relatif) inférieur ou égal à x .

On a alors :

$$C_n = \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2\ell} \quad \text{et} \quad D_n = \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2\ell+1}.$$

La démonstration est ensuite analogue à celle du cas particulier de la question précédente et l'on trouve :

$$C_n = \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2\ell} = 2^{n-1} \quad \text{et} \quad D_n = \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2\ell+1} = 2^{n-1}.$$

Remarque Pour la partie entière de x , vous pourrez aussi trouver d'anciennes notations telles que $[x]$ voire $E(x)$.

Exercice 47 :

1. En utilisant la formule du binôme de Newton, nous obtenons :

$$(\cos t + i \sin t)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (i \sin)^k t \cos^{5-k} t$$

et la somme du membre de droite peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} \cos^5 t + 5 i \sin t \cos^4 t - 10 \sin^2 t \cos^3 t \\ - 10 i \sin^3 t \cos^2 t + 5 \sin^4 t \cos t + i \sin^5 t. \end{aligned}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la formule de Moivre nous donne :

$$(\cos t + i \sin t)^5 = \cos(5t) + i \sin(5t).$$

2. D'après ce qui précède, pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \cos(5t) + i \sin(5t) = \cos^5 t + 5 i \sin t \cos^4 t - 10 \sin^2 t \cos^3 t \\ - 10 i \sin^3 t \cos^2 t + 5 \sin^4 t \cos t + i \sin^5 t. \end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles, nous obtenons :

$$\cos(5t) = \cos^5 t - 10 \sin^2 t \cos^3 t + 5 \sin^4 t \cos t.$$

La relation fondamentale $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ nous donne alors :

$$\cos(5t) = \cos^5 t - 10(1 - \cos^2 t) \cos^3 t + 5(1 - \cos^2 t)^2 \cos t.$$

En réduisant, on en déduit :

$$\cos(5t) = 16 \cos^5 t - 20 \cos^3 t + 5 \cos t.$$

Par suite, la fonction P définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

répond au problème.

3. Étant donné que P est une fonction polynomiale et que :

$$P(1) = 16 - 20 + 5 = 1 \quad \text{et donc} \quad P(1) - 1 = 0$$

on en déduit qu'il existe une fonction polynomiale Q telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) - 1 = (x - 1)Q(x).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$\begin{aligned} P(x) - 1 &= 16x^5 - 20x^3 + 5x - 1 \\ &= (x - 1)(16x^4 + 16x^3 - 4x^2 - 4x + 1). \end{aligned}$$

Exercice 48 :

- On a :

$$\begin{aligned} S_n(x) &= 1 - \binom{2n}{2} x^2 + \binom{2n}{4} x^4 + \cdots + (-1)^n \binom{2n}{2n} x^{2n} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n}{2k} x^{2k}. \end{aligned}$$

- La formule du binôme donne :

$$(1 + ix)^{2n} = \sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} (ix)^p$$

ainsi que :

$$(1 - ix)^{2n} = \sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} (-ix)^p.$$

En sommant on obtient :

$$(1 + ix)^{2n} + (1 - ix)^{2n} = \sum_{p=0}^{2n} (1 + (-1)^p) \binom{2n}{p} (ix)^p.$$

Étant donné que :

- * si p est impair, alors $(1 + (-1)^p) = 0$,
- * si p est pair, alors $(1 + (-1)^p) = 2$,

on a aussi :

$$(1 + ix)^{2n} + (1 - ix)^{2n} = \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ pair}}}^{2n} 2 \binom{2n}{p} (ix)^p.$$

Comme p ne prend que des valeurs paires, on pose $p = 2k$ avec donc k variant de 0 à n , ce qui donne :

$$\begin{aligned} (1 + ix)^{2n} + (1 - ix)^{2n} &= 2 \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} (ix)^{2k} \\ &= 2 \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n}{2k} x^{2k}. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$S_n(x) = \frac{1}{2} \left((1 + ix)^{2n} + (1 - ix)^{2n} \right).$$

- On a :

$$S_n(\tan t) = \frac{1}{2} \left((1 + i \tan t)^{2n} + (1 - i \tan t)^{2n} \right).$$

Or :

$$\begin{aligned}(1 + i \tan t)^{2n} &= \left(1 + i \frac{\sin t}{\cos t}\right)^{2n} \\ &= \frac{(\cos t + i \sin t)^{2n}}{\cos^{2n} t} \\ &= \frac{e^{2int}}{\cos^{2n} t}.\end{aligned}$$

Par conjugaison, on en déduit :

$$(1 - i \tan t)^{2n} = \frac{e^{-2int}}{\cos^{2n} t}$$

et donc :

$$S_n(\tan t) = \frac{e^{2int} + e^{-2int}}{2 \cos^{2n} t} = \frac{\cos 2nt}{\cos^{2n} t}.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $x = \tan t$ et l'on a alors :

$$0 = S_n(x) = S_n(\tan t) \iff \cos 2nt = 0.$$

Or le réel t est solution de l'équation $\cos 2nt = 0$ si, et seulement si :

$$2nt \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$

et donc si, et seulement si :

$$t \equiv \frac{\pi}{4n} \quad \left[\frac{\pi}{2n}\right].$$

Comme $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, cela équivaut à dire qu'il existe $k \in \llbracket -n, n-1 \rrbracket$ tel que :

$$t = \frac{\pi}{4n} + k \frac{\pi}{2n} = \frac{(2k+1)\pi}{4n}.$$

Par suite, les solutions de l'équation $S_n(x) = 0$ sont les :

$$x_k = \tan\left(\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right) \quad \text{avec } k \in \llbracket -n, n-1 \rrbracket.$$

Comme la fonction \tan est strictement croissante sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a obtenu $2n$ valeurs c'est-à-dire autant que le degré de la fonction polynomiale S_n .