Table des matières

Autour du trinôme

Autour du trinôme

Avant de commencer !

- Vous pouvez lire ou relire <l'introduction> qui explique le but de ce travail.
- Si nécessaire, voir aussi le <mode d'emploi> pour les liens <www>

Le but de ce chapitre est de vous proposer une déambulation autour de ce que l'on appelle classiquement le trinôme du second degré, et de vous montrer, à l'aide de ce thème important que vous avez déjà souvent croisé, qu'avec un peu de réflexion vous êtes capable de justifier rapidement par vous-même les résultats associés.

La part des exercices et des questions est ici prédominante afin de vous faire acquérir les mécanismes vous permettant à l'avenir de pouvoir retrouver rapidement ces résultats et leur justifications, sans évidemment les apprendre par cœur.

Même si un tel comportement ne vous a pas été indispensable jusqu'à présent, vu le nombre assez limité de propriétés que vous aviez à connaître, vous allez rapidement vous rendre compte l'an prochain, vu l'inflation du volume de votre cours, que la mémoire seule ne peut suffire !

Ce que je vous propose ici, si l'on veut prendre une comparaison informatique, c'est d'augmenter la vitesse du processeur (ce qui est possible avec un peu d'entraînement) plutôt que d'augmenter la taille de la mémoire de masse.

- Vous vous rendrez compte alors que les démonstrations que vous avez vues en cours (que vous verrez en cours) ne sont en fait que des exercices hyper classiques et qu'il est absolument inutile, voire nuisible, de les apprendre par cœur, même si c'est la premier réflexe que l'on peut avoir pour essayer d'assurer une bonne note à la prochaine interrogation.
- Vous verrez aussi comment l'utilisation conjointe ou croisée de diverses approches, qui sont peut-être encore pour l'instant dans des compartiments bien séparés et bien étanches de votre cerveau, permet de vous faciliter le travail en confirmant ou infirmant certaines idées.

Dans un premier temps un trinôme du second degré est une « expression » du type $a\,x^2 + b\,x + c$ dans laquelle :

- a, b et c sont des nombres ou des paramètres réels (ou complexes) avec $a \neq 0$,
- x est une variable réelle (ou complexe).

Pour l'instant je reste volontairement vague sur la nature exacte de l'objet en question, mais à partir de ces données, on peut s'intéresser :

- lorsque a, b et c sont réels, à la fonction $x \mapsto a\,x^2 + b\,x + c$ et donc peut-être à ses variations, son signe et/ou à sa représentation graphique,
- dans le cas général, aux racines de l'équation $a\,x^2 + b\,x + c = 0$.

Certaines des questions qui suivent sont élémentaires et leurs réponses évidentes, n'ayez donc pas peur de faire simple !

I. Cas où les coefficients a, b et c sont réels

Dans toute cette première partie, et sauf indication particulière,

- a, b et c désignent des réels donnés avec $a \neq 0$;
- x désigne une variable réelle.

Avec ces hypothèses, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$, on dispose donc d'une fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a\,x^2 + b\,x + c \end{array}$$

dont on pourra, au choix et dans un ordre quelconque, étudier les variations, le signe, la représentation graphique et les racines.

1. Un problème d'identification

La fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a\,x^2 + b\,x + c \end{array}$$

est donc une fonction polynomiale (*cf.* chapitre sur les Σ). Nous avons déjà établi, pour une fonction polynomiale quelconque, l'unicité des coefficients permettant de l'écrire. L'exercice suivant vous en propose une démonstration (plus simple) dans le cas particulier des fonctions polynomiale de degré au plus 2.

www **Ex 1 :** Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. (Ici on ne suppose donc pas $a \neq 0$).

1. En supposant que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a\,x^2 + b\,x + c = 0,$$

   montrer que $a = b = c = 0$.

2. Soit a', b' et c' des réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a\,x^2 + b\,x + c = a'\,x^2 + b'\,x + c'.$$

   Déduire de la question précédente que $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$. p.25

Le résultat que vous venez d'établir dans l'exercice précédent est un résultat d'identification. En effet il dit que si, en chaque point, les deux fonctions

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a\,x^2 + b\,x + c \end{array} \qquad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a'\,x^2 + b'\,x + c' \end{array}$$

prennent les mêmes valeurs, alors les coefficients correspondants sont égaux.

Remarque Il faut bien garder à l'esprit que l'on ne peut « identifier » des expressions analogues pour en déduire l'égalité de certaines de leurs parties qu'après avoir, comme ci-dessus, démontré un résultat d'unicité. Il faudra y penser lorsque (souvent pour vous éviter de réfléchir) vous vous poserez (ou vous poserez à un interlocuteur quelconque) une question du type : « a-t-on le droit d'identifier ? ». il ne s'agit pas d'un droit (acquis) mais d'un résultat, en fait un résultat d'unicité, que l'on doit avoir démontré pour pouvoir l'utiliser.

Sur la méthode utilisée dans l'exercice précédent

- On a commencé par démontrer un cas particulier, en fait avec $a' = b' = c' = 0$, ce qui simplifie l'écriture de la partie technique de la démonstration : on n'utilise alors que 3 paramètres au lieu de 6.
- Ensuite, on a utilisé ce résultat particulier pour démontrer, et alors très rapidement, le cas général.

C'est une démarche courante en mathématiques.

2. Forme canonique

La mise sous forme canonique est une transformation permettant de trouver des nombres réels β et γ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a\,x^2 + b\,x + c = a\big((x+\beta)^2 + \gamma\big).$$

Méthode On pourrait évidemment chercher les réels α et β en développant le membre de droite et en identifiant les coefficients, mais ce n'est ni élégant ni efficace. Il est préférable de commencer par mettre a en facteur puis de considérer que $x^2 + \frac{b}{a}\,x$ est le début d'un carré.

www **Ex 2 :** Réaliser la mise sous forme canonique précédente et préciser les valeurs de réels β et γ en fonction de a, b et c. p.25

Remarque Il n'y a évidemment aucune formule à retenir concernant cette mise sous forme canonique. Tout ce dont il faut se souvenir, c'est de l'astuce initiale : mettre a en facteur et « faire apparaître » un carré. Mais cela vous reviendra automatiquement lorsque vous en aurez besoin dès que vous aurez refait trois ou quatre fois le calcul, bien sûr en le réfléchissant à chaque fois et non pas en faisant un copier-coller à partir de la solution précédente !

www **Ex 3 :** Mettre $2\,x^2 + 5\,x + 6$ sous forme canonique. p.26

www **Ex 4 :** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Mettre $x^2 - 2\,x\,\cos\theta + 1$ sous forme canonique. p.26

3. Racines réelles du trinôme à coefficients réels

On rappelle que, sauf indication particulière, a, b et c désignent des réels avec $a \neq 0$.

a) Discriminant et racines

La mise sous forme canonique précédente (ne pas hésiter à la refaire, sans regarder ce qui a déjà été fait) permet de prouver que l'équation :

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \qquad (E)$$

possède (au moins) une solution réelle si, et seulement si, $\Delta = b^2 - 4\,a\,c \geqslant 0$.

Remarque

- Vous savez certainement que ce réel Δ s'appelle **discriminant de l'équation**.
- Pour une telle équation du second degré, on parle aussi bien de **solution réelle de l'équation** que de **racine réelle du trinôme**.

www **Ex 5 :** Justifier le résultat précédent. p.26

www **Ex 6 :** Lorsque l'équation (E) possède (au moins) une solution réelle, décrire l'ensemble de ses solutions. p.27

Grâce aux deux exercices précédents vous venez de (re-)démontrer que si a, b et c sont trois réels tels que $a \neq 0$, alors on peut déterminer le nombre de solutions réelles, de l'équation $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ en étudiant son discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4\,a\,c\,.$$

Plus précisément, l'équation $a\,x^2 + b\,x + c = 0$:

- ne possède aucune racine réelle si $\Delta < 0$;
- possède une unique racine réelle si $\Delta = 0$; cette racine est alors $-\dfrac{b}{2a}\cdot$
- possède exactement deux racines réelles (distinctes) lorsque $\Delta > 0$;
  dans ce cas, si l'on désigne par δ une racine de Δ, alors ces racines sont :

$$\frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b+\delta}{2a}\cdot$$

www **Ex 7 :** Lorsque l'équation (E) possède deux racines distinctes, comparer la description des racines que l'on vient de donner ci-dessus avec celle que vous avez vue dans le secondaire. p.27

Remarque de rédaction Quand on a besoin d'introduire un discriminant pour étudier une équation du second degré, que ce soit à l'oral ou à l'écrit, il n'est pas correct de parler simplement du « Δ de l'équation », même si Δ est une notation souvent utilisée dans un tel cas ; il faut absolument, comme on le verra dans les rédactions qui suivent, une phrase du type « le discriminant Δ de cette équation, qui vaut $\Delta = \cdots$ ».

www **Ex 8 :** Soit θ un paramètre donné de l'intervalle $]0, \pi[$.

Résoudre l'équation : $x^2 - 2\,x\,\cos\theta + 1 = 0$. p.28

www **Ex 9 :** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation : $x^2 - 2\,x\,\cos\theta + \cos 2\theta = 0$. p.28

www **Ex 10 :** Résoudre l'équation : $(2\,x - 1)\,(3\,x - 2) = 0$. p.28

www **Ex 11 :** Si $a\,c < 0$, que peut-on dire du nombre de racines de l'équation : p.28

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0\,?$$

www **Ex 12 :** Lorsque $a \neq 0$ et $c = 0$, résoudre l'équation $a\,x^2 + b\,x = 0$. p.28

www **Ex 13 :** Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ ainsi que $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a\,x^2 + b\,x + c \end{array}$.

1. En supposant qu'il existe trois réels distincts x_1, x_2 et x_3 tels que :

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0,$$

montrer $a = b = c = 0$.

2. Soit $a' \in \mathbb{R}$, $b' \in \mathbb{R}$ et $c' \in \mathbb{R}$ ainsi que $g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a'\,x^2 + b'\,x + c' \end{array}$.

En supposant qu'il existe trois réels distincts x_1, x_2 et x_3 tels que :

$$f(x_1) = g(x_1), \quad f(x_2) = g(x_2) \quad \text{et} \quad f(x_3) = g(x_3),$$

montrer que l'on a $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$.

3. À quoi vous fait penser le résultat précédent ? p.29

www **Ex 14 :** *Racines entières d'une équation à coefficients entiers*

Dans cet exercice on suppose $a \in \mathbb{Z}^*$, $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$. Montrer que toute racine entière de l'équation $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ est un diviseur de c. p.30

www **Ex 15 :** Quelles sont les valeurs entières de b pour lesquelles l'équation :

$$2\,x^2 + b\,x + 11 = 0$$

possède une racine entière ? p.30

b) Factorisation et signe du trinôme

Nous allons ici relier racines et factorisation d'un trinôme du second degré.

www **Ex 16 :** Montrer que, si $\Delta = b^2 - 4\,a\,c \geqslant 0$, alors il existe des nombres réels x_1 et x_2 (pas forcément distincts) tels que : p.31

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,.$$

www **Ex 17 :** Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$, ainsi que x_1 et x_2 des réels (pas forcément distincts) tels que : p.31

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a\,x^2 + b\,x + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

1. Que peut-on dire des racines de l'équation $a\,x^2 + b\,x + c = 0$?

2. Peut-on en déduire que l'on a : $\Delta = b^2 - 4\,a\,c \geqslant 0$?

Résultat Dans les exercices précédents, on a donc prouvé que si a, b et c sont trois réels tels que $a \neq 0$, alors l'équation $a\,x^2 + b\,x + c = 0$

- possède comme racines les nombres réels distincts x_1 et x_2 si, et seulement si,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2) \;\; ;$$

- possède comme racine le seul nombre réel x_0 si, et seulement si,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x - x_0)^2 \;\; ;$$

  c'est pourquoi on dit dans ce cas que x_0 est **racine double du trinôme**.

C'est ainsi que l'on aboutit à l'énoncé suivant : lorsque l'on a $\Delta = b^2 - 4\,a\,c \geqslant 0$, l'équation $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ possède **deux racines distinctes ou confondues**.

On peut maintenant donner un résultat concernant le signe du trinôme.

www **Ex 18 :** Que peut-on dire du signe de :

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

lorsque la variable x décrit $\mathbb{R}$? p.31

www **Ex 19 :** Soit a, b et c trois réels quelconques tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a\,x^2 + b\,x + c \geqslant 0.$$

Montrer que l'on a $b^2 - 4\,a\,c \leqslant 0$. p.32

c) Relations entre les coefficients et les racines

Lorsque l'équation du seconde degré $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ possède deux racines réelles (distinctes ou confondues), il est possible, sans calculer ces racines, d'en exprimer la somme et le produit en fonction des coefficients a, b et c.

www **Ex 20 :** On suppose ici que l'équation $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ possède deux racines réelles x_1 et x_2 distinctes (*i.e.* $x_1 \neq x_2$) ou confondues (*i.e.* $x_1 = x_2$).

1. Expliciter $s = x_1 + x_2$ et $p = x_1\,x_2$ en fonction de a, b et c.
2. Que vaut Δ en fonction de x_1 et x_2 ? p.32

Proposition 1

Lorsque l'équation $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ possède deux racines réelles (distinctes ou confondues) notées x_1 et x_2, alors :

- leur somme $s = x_1 + x_2$ vaut $s = -\dfrac{b}{a}$;
- leur produit $p = x_1\,x_2$ vaut $p = \dfrac{c}{a}$ ·

Méthode Il faut pouvoir écrire ces relations sans la moindre hésitation, mais lorsque l'on ne les a pas utilisées depuis longtemps il est humain d'hésiter. Au lieu de sortir alors des formules au hasard, il suffit de faire le développement (de tête si possible et dès que possible) de l'identité :

$$a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$

pour retrouver :

$$b = -a\,(x_1 + x_2) \quad \text{et} \quad c = a\,(x_1\,x_2)$$

ce qui donne immédiatement les formules précédentes.

Remarque Maintenant que $\frac{c}{a}$ a un statut particulier, on peut reformuler le résultat de l'exercice 11 de la page 6. Comme les deux réels $\frac{c}{a}$ et $a\,c$ ont même signe, si l'on a $\frac{c}{a} < 0$, alors on peut, sans calculer le discriminant, affirmer directement que l'équation possède deux racines réelles distinctes.

www **Ex 21 :** On considère ici l'équation : $x^2 + \sqrt{3}\,x - 1 = 0$.

1. Vérifier qu'elle possède deux racines réelles distinctes x_1 et x_2.
2. Calculer $x_1^2 + x_2^2$.
3. Simplifier de même $x_1^3 + x_2^3$. p.33

En fait, on peut compléter la proposition précédente.

Proposition 2

Si s et p sont deux réels donnés, alors les réels x_1 et x_2 vérifient :

$$x_1 + x_2 = s \qquad \text{et} \qquad x_1\, x_2 = p$$

si, et seulement si, ce sont les racines de l'équation : $x^2 - s\,x + p = 0$.

www **Ex 22 :** Démontrer la proposition précédente. p.33

Méthode L'utilisation du résultat précédent permet de déterminer facilement deux nombres réels dont on connaît la somme et le produit. C'est une méthode bien plus efficace que celle qui consisterait à « tirer l'une des inconnues en fonction de l'autre », et qui, au bout d'un calcul laborieux, vous amènerait à la même équation.

www **Ex 23 :** Quels sont les réels dont la somme est 4 et le produit -1 ? p.34

www **Ex 24 :** Quels sont les réels dont la somme est -1 et le produit 4 ? p.34

Inversement, le résultat de la proposition précédente peut aussi permettre de résoudre sans calcul une équation du second degré.

www **Ex 25 :** Résoudre l'équation : $x^2 - 15\,x + 26 = 0$. p.34

Un outil de vérification La somme et du produit des racines permettent aussi de vérifier le calcul des racines d'une équation du second degré. Par exemple, dans l'exercice 9, on a trouvé que les racines de $x^2 - 2\,x\,\cos\theta + \cos 2\theta = 0$ sont :

$$x_1 = \cos\theta - \sin\theta \quad \text{et} \quad x_2 = \cos\theta + \sin\theta.$$

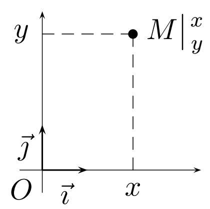
Il n'est pas vraiment immédiat de vérifier ces valeurs en les substituant dans l'équation. En revanche, il est facile d'en faire la somme et le produit et de vérifier :

$$x_1 + x_2 = 2\,\cos\theta \quad \text{ainsi que} \quad x_1\,x_2 = \cos 2\theta.$$

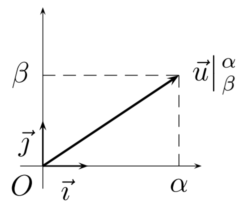
4. Variations, représentations graphiques

Dans toute cette partie, on suppose le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la notation $M\Big|{}^{x}_{y}$ signifie que M est le point du plan dont x et y sont les coordonnées par rapport à $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ou encore $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$.



- Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la notation $\vec{u}\Big|{}^{\alpha}_{\beta}$ signifie que $\vec{u}$ est le vecteur du plan dont α et β sont les composantes par rapport à $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ou encore $\vec{u} = \alpha\,\vec{\imath} + \beta\,\vec{\jmath}$.



Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la **courbe d'équation $y = f(x)$** est, par définition, l'ensemble des points $M\Big|_{y}^{x}$ du plan tels que $y = f(x)$; cette courbe est aussi appelée **représentation graphique de f**.

Allure d'une courbe

- Lorsque l'on a besoin d'une représentation graphique précise d'une telle courbe (pour résoudre graphiquement un problème par exemple), il est indispensable d'en calculer bon nombre de points voire d'utiliser un outil de tracé graphique. Ne vous privez pas, *au début*, de le faire pour les courbes qui vont suivre.
- En revanche, dans de nombreux problèmes théoriques, il suffit seulement de **donner l'allure de la courbe**, c'est-à-dire de la tracer rapidement en mettant en évidence ses propriétés intéressantes mais sans devoir déterminer d'innombrables points ni avoir recours à votre calculatrice (graphique) préférée.

  Il faut savoir le faire sans hésiter pour les courbes classiques, en particulier pour celles que nous allons voir dans la suite.

a) Monotonie d'une fonction

Profitons de cette partie pour parler de quelques symboles mathématiques.

Soit I une partie de $\mathbb{R}$ et $f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

- Vous savez que **la fonction f est croissante** si :

  pour tout $x \in I$ et pour tout $y \in I$, alors $x \leqslant y$ entraîne $f(x) \leqslant f(y)$. $\quad (i)$

  Cela s'écrit de façon plus synthétique avec des symboles mathématiques :

  $$\forall x \in I \quad \forall y \in I \quad x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y). \qquad (ii)$$

  * Le symbole « $\forall$ », appelé **quantificateur universel**, se lit « pour tout ».
  * Le symbole « $\Rightarrow$ », appelé **implication**, se lit « entraîne ».

  Ainsi, la phrase mathématique (ii), on dit aussi **l'assertion** (ii), traduit de façon plus compacte et plus lisible la phrase initiale (i).

  Remarque Le groupe « $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$ » si lit aussi très souvent :

  $$\text{si } x \leqslant y, \text{ alors } f(x) \leqslant f(y).$$

www **Ex 26 :** Montrer que la fonction $u : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est croissante. p.34

- Si l'on veut exprimer que **la fonction f n'est pas croissante**, il suffit de nier la phrase initiale (i) et de dire :

  il existe $x \in I$ et il existe $y \in I$ tels que $x \leqslant y$ mais avec $f(x) > f(y)$;

  ou encore :

  on peut trouver $x \in I$ et $y \in I$ tels que $x \leqslant y$ mais avec $f(x) > f(y)$.

  Cela aussi s'écrit de façon plus synthétique avec des symboles mathématiques :

  $$\exists x \in I \quad \exists y \in I \quad x \leqslant y \quad \text{et} \quad f(x) > f(y).$$

  Le symbole « $\exists$ » est appelé **quantificateur existentiel**, et se lit « il existe ».

www **Ex 27 :** Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ n'est pas croissante. p.34

- De même, pour exprimer que f est décroissante, on écrit :

  $$\forall x \in I \quad \forall y \in I \quad x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y).$$

www **Ex 28 :** Montrer que la fonction $v : \begin{array}{ccc}]-\infty, 0] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est décroissante. p.35

- Et pour exprimer que f n'est pas décroissante, on écrit donc :

  $$\exists x \in I \quad \exists y \in I \quad x \leqslant y \quad \text{et} \quad f(x) < f(y).$$

www **Ex 29 :** Pierre dit que la fonction $u : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ ne peut pas être décroissante puisqu'elle est croissante. Qu'en pensez-vous ? p.35

Les fonctions u et v des exercices 26 et 28 sont des restrictions de la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}.$$

Usuellement, on n'utilise pas deux noms de fonctions différents mais on dit que :

- la fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$;
- la fonction f est décroissante sur $]-\infty, 0]$.

Quand on étudie les variations d'une fonction, on résume toujours les résultats sous la forme d'un tableau de variations. Pour la fonction f précédente, cela donne :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Dans ce tableau de variations, il est d'usage de mettre (quand elles existent) les limites aux bornes mais ce n'est pas une obligation si l'on le demande pas explicitement. Dans le cas de la fonction f précédente, on connaît ces limites, et l'on peut donc compléter le tableau.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **monotone** si elle est croissante ou si elle est décroissante.

www **Ex 30 :** La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est-elle monotone ? p.35

b) Variations et représentation graphique de $x \mapsto a\,x^2$

Dans toute cette partie,

- a désigne un réel non nul et on considère la fonction : $f_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a\,x^2 \end{array}$;
- on note Γ_a la **courbe d'équation** $y = f_a(x)$.

Vous savez que cette fonction f_a est dérivable ; cela pourrait servir.

www **Ex 31 :** Que pouvez-vous dire des variations de la fonction f_a ? p.35

www **Ex 32 :** Quelques questions évidentes sur les courbes Γ_a.

1. Quel point remarquable appartient à toute courbe Γ_a ?
   Que dire de la tangente à Γ_a en ce point ?
2. Quelle droite est axe de symétrie de toute courbe Γ_a ?
3. Pour $a > 0$, dans quel demi-plan se trouvent toutes les courbes Γ_a ?
4. Pour a donné, que peut-on dire des courbes Γ_a et Γ_{-a} ? p.36

Les remarques (évidentes) faites dans les exercices précédents doivent vous permettre de donner l'allure de chaque courbe Γ_a.

www **Ex 33 :** Pour a donné, quelle est l'allure de la courbe Γ_a ?

Si $0 < a_1 \leqslant a_2$, que peut-on dire des courbes Γ_{a_1} et Γ_{a_2} ? p.37

Méthode Au niveau post-bac, il est indispensable de pouvoir donner rapidement (et même mentalement) l'allure d'une telle courbe car la visualisation d'une représentation graphique peut fournir idées et pistes, voire, à l'inverse, éviter quelques énormités. D'une façon générale, quand vous pensez à une fonction, il est bon de penser aussi au graphe de cette fonction.

c) Variations et représentation graphique de $x \mapsto a\,x^2 + b\,x + c$

Dans toute cette partie,

- a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$,
- on note f l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a\,x^2 + b\,x + c \end{array}$.

L'utilisation de la dérivée permet d'étudier facilement les variations de f, puis de prouver que la courbe Γ d'équation $y = f(x)$ possède un axe de symétrie vertical. C'est l'objet de l'exercice suivant.

www **Ex 34 :** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a\,x^2 + b\,x + c \end{array}$.

1. Étudiez les variations de f.
2. Montrer que sa courbe Γ possède un axe de symétrie vertical.
3. Donner l'allure de la courbe Γ. p.37

Définition 1

La courbe Γ d'équation $y = a\,x^2 + b\,x + c$ (avec $a \neq 0$) est une **parabole**.

- Lorsque $a > 0$, on dit que Γ tourne sa concavité vers le haut.
- Lorsque $a < 0$, on dit que Γ tourne sa concavité vers le bas.

Dans les tableaux de variations précédents, nous n'avons pas mis les limites de f en $\pm\infty$. Elles sont moins évidentes que dans la partie précédente car il peut y avoir forme indéterminée. Nous allons préciser cela dans l'exercice suivant.

www **Ex 35 :** Soit la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a\,x^2 + b\,x + c \end{array}$.

1. Rappeler la règle que vous connaissez sur les limites de f en $\pm\infty$.
2. Comment justifie-t-on cette règle ?
3. Compléter les tableaux de variations précédents. p.39

Maintenant que nous avons des tableaux de variations complets de :

$$f : x \mapsto a\,x^2 + b\,x + c$$

nous pouvons faire le lien avec la partie I.3. concernant les racines de l'équation :

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0.$$

www **Ex 36 :** Discussion graphique du nombre de racines de l'équation $f(x) = 0$.

1. Préciser l'allure de Γ en tenant compte des racines de $f(x) = 0$.
2. Comment relier ces résultats avec ceux de la partie sur les racines ?
3. Donner une interprétation graphique de la formule concernant la somme des racines de l'équation $f(x) = 0$. p.39

Méthode Les représentations graphiques précédentes nous ont permis, de « justifier graphiquement » le nombre de racines de l'équation $f(x) = 0$. Dès que l'on sait rapidement donner l'allure de la courbe d'équation $y = f(x)$, il est immédiat d'avoir ainsi l'idée du résultat. Ensuite, une justification rigoureuse peut (doit) toujours se faire à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires.

Exemple

Supposons $a > 0$ et considérons le cas $f\left(-\frac{b}{2\,a}\right) < 0$, ce qui équivaut alors à $\Delta > 0$. Le tableau de variations de f est alors :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

- Étant donné que f est continue, que $f\left(-\frac{b}{2\,a}\right) < 0$ et que $\lim_{x\to\pm\infty} f = +\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une racine sur l'intervalle $I = \left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right[$.
- Or la fonction f est strictement croissante sur I, c'est-à-dire qu'elle vérifie :

$$\forall x \in I \quad \forall y \in I \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)\ ;$$

par suite, une telle racine est forcément unique.

Remarque

- Dans l'exemple précédent, la croissance de la fonction n'aurait pas suffi pour justifier l'unicité de la racine car une fonction croissante peut très bien être constante sur un intervalle non réduit à un point.
- Par convention, dans un tableau de variations, la flèche $\searrow$ (resp. $\nearrow$) signifie que la fonction est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur l'intervalle correspondant.

www **Ex 37 :** Sur le tracé de la courbe Γ d'équation $y = a\,x^2 + b\,x + c$, que peut-on lire en ce qui concerne les quantités a, b, c et Δ ? p.41

5. Localisation des racines

Il arrive souvent d'avoir besoin de connaître le signe des racines d'une équation du second degré, voire de placer ces racines par rapport à certaines valeurs, par exemple par rapport à ± 1 si ces racines doivent être les valeurs d'un sinus ou d'un cosinus.

- Lorsque l'équation ne dépend d'aucun paramètre, il est évidemment possible de commencer par en exprimer les racines puis de voir où sont ces valeurs ; toutefois ce n'est pas toujours évident lorsque l'expression des racines fait intervenir des radicaux.
- En revanche, c'est beaucoup plus difficile lorsque l'équation dépend d'un ou plusieurs paramètres.

Dans cette partie, nous allons rappeler quelques méthodes élémentaires permettant de répondre à ce problème de localisation des racines sans les exprimer. Comme précédemment, a, b et c désignent des réels avec $a \neq 0$, et l'on pose :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a\,x^2 + b\,x + c \end{array}.$$

a) Signes des racines

Méthode Comme il est rappelé dans l'exercice suivant, on peut facilement étudier le signe des racines de l'équation :

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0,$$

en utilisant les signes de $\dfrac{c}{a}$ et $\dfrac{b}{a}\cdot$ Mais il n'y a vraiment rien de sorcier là-dedans.

www **Ex 38 :** On suppose ici que l'équation :

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

possède deux racines réelles dont on veut étudier les signes.

1. Rappeler comment exprimer la somme et le produit de ces racines en fonction des coefficients (évidemment sans tourner les pages).
2. À quoi s'intéresser en premier, la somme, le produit ?
3. Lorsque $\dfrac{c}{a}$ est positif, comment préciser le signe des racines ?
4. Lorsque $\dfrac{c}{a}$ est négatif, quelle information donne le signe de $\dfrac{b}{a}$? p.42

www **Ex 39 :** Déterminer les signes des racines de l'équation : $x^2 + 3\sqrt{3}\,x - 1 = 0$. p.42

www **Ex 40 :** Pour toute valeur du paramètre réel m, on considère l'équation :

$$x^2 + 2\,m\,x + m - 1 = 0. \qquad (E_m)$$

Déterminer le signe des racines de cette équation. p.42

www **Ex 41 :** Que dire des signes des racines de l'équation : $x^2 + \sqrt{3}\,x + 1 = 0$? p.43

b) Positions des racines par rapport à un nombre

Méthode Comme on va le justifier dans l'exercice suivant, on peut facilement placer un réel α par rapport aux racines de l'équation :

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c = 0,$$

en utilisant le signe de $a\,f(\alpha)$ et éventuellement celui de $\alpha + \dfrac{b}{2a}\cdot$
Mais il n'y a vraiment rien de sorcier là-dedans.

www **Ex 42 :** Dans cet exercice, on suppose que l'équation $f(x) = 0$ possède deux racines distinctes x_1 et x_2 vérifiant $x_1 < x_2$. On désigne par α un réel quelconque.

1. Lorsque $a > 0$, montrer comment la connaissance du signe de $f(\alpha)$ permet de placer le réel α par rapport aux deux racines x_1 et x_2.
2. Dans le cas général (sans hypothèse sur le signe de a), expliquer pourquoi il est préférable d'étudier le signe de $a\,f(\alpha)$.
3. Lorsque $a\,f(\alpha) > 0$, expliquer l'intérêt d'étudier le signe de $\alpha + \dfrac{b}{2\,a}\cdot$ p.43

Remarque Ce que l'on vient de faire permet aussi de placer les racines de l'équation $f(x) = 0$ par rapport à un nombre α donné. Cela peut être très utile lorsque ces racines sont par exemple des sinus ou des cosinus.

www **Ex 43 :** Combien l'équation :

$$\cos^2\theta + \sqrt{3}\,\cos\theta - 1 = 0 \qquad (E)$$

possède-t-elle de solutions dans $[0, \pi]$? p.44

6. Translation d'un point, d'une courbe

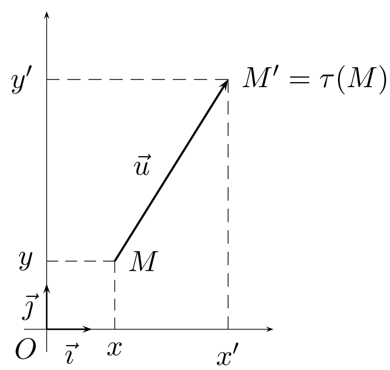
Dans la partie I.4., on a étudié les paraboles d'équation $y = a\,x^2 + b\,x + c$ et l'on a vu comment en donner l'allure. Mais on peut faire bien mieux car la « forme » de cette courbe ne dépend que du coefficient a. C'est ce que nous allons justifier ici.

Rappel Si $\vec{u}$ est un vecteur du plan, la translation de vecteur $\vec{u}$ est l'application $\tau_{\vec{u}}$, qui à tout point M du plan, associe le point $\tau_{\vec{u}}(M)$ tel que :

$$\tau_{\vec{u}}(M) = M + \vec{u}$$

ou encore, en posant $M' = \tau_{\vec{u}}(M)$:

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}.$$



Avec les notations introduites page 9, si $\vec{u}\Big|{\alpha \atop \beta}$, $M\Big|{x \atop y}$ et $\tau_{\vec{u}}(M)\Big|{x' \atop y'}$, alors on a :

$$x' = x + \alpha \quad \text{et} \quad y' = y + \beta.$$

www **Ex 44 :** Quelle relation bien connue permet de justifier les formules précédentes ? p.44

Translatée d'une courbe Si Γ est une courbe du plan, alors $\tau_{\vec{u}}(\Gamma)$ est, par définition, la transformée de Γ la par la translation $\tau_{\vec{u}}$, c'est-à-dire l'ensemble des images par $\tau_{\vec{u}}$ de chaque point de Γ.

www **Ex 45 :** Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et Γ la courbe d'équation $y = f(x)$.

Lorsque $\vec{u}\Big|_{\beta}^{\alpha}$, déterminer une équation de $\Gamma' = \tau_{\vec{u}}(\Gamma)$. p.45

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. L'exercice suivant permet de prouver que la courbe Γ $y = a\,x^2 + b\,x + c$ se déduit par translation de la courbe Γ_a d'équation $y = a\,x^2$. Par suite, les deux courbes ont la même forme.

www **Ex 46 :** En mettant le trinôme sous forme canonique, montrer que la courbe Γ se déduit de Γ_a par une translation dont on précisera le vecteur. p.45

7. En guise de conclusion de cette première partie

Au terme de cette première partie et au fil des exercices traités, j'espère :

- tout d'abord, que vous aurez une vue d'ensemble plus épurée des propriétés gravitant autour de ce fameux trinôme du second degré à coefficients réels ;
- ensuite, que vous aurez relativisé l'utilisation des formules permettant d'expliciter les racines d'une équation du second degré ;
- enfin, que vous aurez acquis quelques réflexes et quelques méthodes vous permettant, lorsque vous en avez besoin, de retrouver la forme exacte de tel ou tel énoncé correspondant à ce thème, sans angoisse et sans hésitation.

Mais j'espère aussi :

- que vous aurez réussi à décloisonner quelque peu votre cerveau ;
- que vous aurez compris comment l'utilisation conjointe de plusieurs points de vue (de regards croisés pour utiliser une expression à la mode) peut permettre d'assurer les connaissances et surtout d'éviter certaines angoisses ;
- que vous vous serez rendu compte de l'importance que peut avoir l'utilisation de représentations graphiques pour mémoriser certaines notions.

Bien sûr l'ensemble peut vous paraître un peu redondant mais n'oubliez pas qu'il est préférable d'avoir plusieurs moyens de vérification plutôt que de n'en avoir aucun !

II. Cas où les coefficients a, b et c sont complexes

Bien que cela ne soit pas au programme de la classe de Terminale, nous allons maintenant nous intéresser au trinôme du second degré à coefficients complexes. C'est l'occasion de vous poser quelques questions intéressantes, que nous allons essentiellement traiter sous formes d'exercices, et qui vous permettront d'établir certains résultats que vous retrouverez dans les tout premiers chapitres de l'an prochain.

Donc dans toute cette seconde partie, et sauf indication plus précise :

- a, b et c sont trois complexes donnés avec $a \neq 0$;
- z désigne une variable complexe.

Avec ces hypothèses, on dispose donc d'une fonction f qui, à tout nombre complexe z, associe le complexe $f(z) = a\,z^2 + b\,z + c$, ce que nous noterons :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & a\,z^2 + b\,z + c \end{array}$$

www **Ex 47 :** Reprendre *mentalement* chacun des thèmes de la première partie (cas réel) et envisager leur étude dans le cas où a, b et c sont complexes. p.45

www **Ex 48 :** Montrer que, si :

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad a\,z^2 + b\,z + c \in \mathbb{R},$$

alors a, b et c sont réels. p.46

1. Un problème d'identification

www **Ex 49 :** Soit $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$.

1. En supposant : $\forall z \in \mathbb{R} \quad a\,z^2 + b\,z + c = 0$, montrer : $a = b = c = 0$.
2. Justifier de même :

$$\left(\forall z \in \mathbb{C} \quad a\,z^2 + b\,z + c = 0\right) \Longrightarrow a = b = c = 0.$$

3. Comme dans le cas réel, établir un résultat d'identification. p.46

Ainsi, la propriété d'identification que l'on a établie lorsque les coefficients a, b et c sont réels, reste valable lorsque ces coefficients sont complexes. Comme pour le cas réel, nous verrons dans la suite que les hypothèses de l'exercice précédent sont bien trop fortes pour la conclusion.

www **Ex 50 :** Au fait, que suffit-t-il d'avoir comme hypothèse avec des coefficients réels pour conclure $a = a'$, $b = b$ et $c = c'$? p.47

2. Forme canonique

Comme dans le cas réel, la mise sous forme canonique est une transformation permettant de trouver des complexes β et γ tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad a\,z^2 + b\,z + c = a\,\left(z + \beta\right)^2 + \gamma.$$

www **Ex 51 :** Réaliser la mise sous forme canonique précédente et préciser les valeurs de complexes β et γ en fonction de a, b et c. p.47

Remarque Il n'y a toujours évidemment aucune formule à retenir concernant cette mise sous forme canonique, mais il faut savoir la faire, naturellement et rapidement, lorsque le besoin s'en fait sentir.

3. Racines du trinôme à coefficients complexes

a) Racines carrées d'un nombre complexe

Rappel

- Tout réel strictement positif α possède deux racines carrées (réelles) qui sont $\sqrt{\alpha}$ et $-\sqrt{\alpha}$; ne pas oublier pas que $\sqrt{\alpha}$ désigne la racine positive de α.
- Le réel 0 ne possède qu'une seule racine carrée qui est 0.
- Un nombre réel α strictement négatif ne possède aucune racine carrée réelle puisque le carré de tout réel est positif.

Définition 2

On appelle **racine carrée** d'un complexe z tout complexe Z tel que $Z^2 = z$.

Exemple Les complexes i et $-i$ sont des racines carrées de -1 puisque :

$$i^2 = (-i)^2 = -1.$$

Nous verrons dans l'exercice suivant que ce sont les seules.

www **Ex 52 :** Dans cet exercice, α désigne un nombre réel.

1. Si $\alpha > 0$, quelles sont les racines carrées complexes de α ?
2. Si $\alpha < 0$, que peut-ton dire de ses racines carrées (complexes) ? p.47

www **Ex 53 :** Déterminer sous forme trigonométrique :

1. les racines carrées de i ;
2. les racines carrées de $1 + i$. p.48

La méthode que nous venons d'utiliser dans l'exercice précédent va nous permettre de prouver le résultat général suivant.

Proposition 3

Tout complexe non nul z admet exactement deux racines carrées opposées $\pm Z$.

www **Ex 54 :** Démontrer la proposition précédente.

Indication : exprimer Z et z sous forme trigonométrique. p.48

Attention Bien que tout complexe possède une racine carrée, il est impossible à notre niveau d'utiliser la notation $\sqrt{z}$ pour un complexe z quelconque.

- En effet, lorsque $z \in \mathbb{R}_+$, on appelle $\sqrt{z}$ la racine carrée positive de z.

- En revanche, pour un complexe z quelconque, on ne sait pas privilégier ainsi l'une des deux racines puisque, sur $\mathbb{C}$, l'on n'a pas défini de relation d'inégalité (relation d'ordre) et que l'on ne peut donc pas parler de complexe positif. Pour $z \in \mathbb{C}$, il faut donc parler d'*une* (article indéfini) racine carrée de z et non pas de *la* (article défini) racine carrée de z.

Expression algébrique des racines Dans les calculs précédents, l'utilisation de formes trigonométriques a permis de donner facilement les expressions des racines carrées d'un nombre complexe non nul, mais on a parfois besoin d'exprimer une racine de z sous forme algébrique, *i.e.* sans utilisation de ligne trigonométrique. On a vu ci-dessus comment faire lorsque $z \in \mathbb{R}$. L'exercice suivant vous donne la technique classique à utiliser lorsque $z \notin \mathbb{R}$.

www **Ex 55 :** On considère ici un complexe $z = x + i\,y$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^*$.

1. Soit $Z = X + i\,Y$ avec $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$.
   Donner un système en X et Y équivalent à l'équation $Z^2 = z$.
2. Résoudre ce système en ajoutant la relation $|Z|^2 = |z|$. p.49

Méthode Il est évidemment inutile de retenir les formules trouvées dans l'exercice précédent. En revanche, il est important de retenir la « ruse » utilisée : pour avoir la forme algébrique des Z tels que $Z^2 = z$, ajouter la relation $|Z|^2 = |z|$.

www **Ex 56 :** Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $z = 1 + i$.

En déduire des expressions algébriques de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$, *i.e.* des expressions n'utilisant que les quatre opérations et des racines carrées. p.49

b) Discriminant et racines du trinôme

La mise sous forme canonique du trinôme à coefficients complexes (ne pas hésiter à la refaire, sans regarder ce qui a déjà été fait) permet de prouver que l'équation :

$$a\,z^2 + b\,z + c = 0 \qquad (E)$$

possède toujours (au moins) une racine complexe.

Remarque Comme dans le cas réel, pour une telle équation, on parle aussi bien de *solution complexe de l'équation* que de *racine complexe du trinôme.*

www **Ex 57 :** Justifier le résultat précédent. p.50

www **Ex 58 :** Décrire l'ensemble des solutions de l'équation (E). p.50

Grâce aux deux exercices précédents, vous venez de démontrer la proposition suivante qui fera partie de votre cours de première année du supérieur.

Proposition 4

Si a, b et c sont trois complexes tels que $a \neq 0$, alors :

- l'équation $a\,z^2 + b\,z + c = 0$ a toujours (au moins) une racine complexe ;
- plus précisément, en posant $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$:
  - ∗ si $\Delta = 0$, elle possède une unique racine complexe qui est $-\dfrac{b}{2a}\cdot$
  - ∗ si $\Delta \neq 0$, elle possède (exactement) deux racines distinctes qui sont :

$$\frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b+\delta}{2a}$$

où δ est une racine de Δ, *i.e.* *un* complexe vérifiant $\delta^2 = \Delta$.

Remarques

- Évidemment, dans ce cas, il n'y a aucune discussion sur le signe de Δ !
- On peut se servir des mêmes formules dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$, à condition d'utiliser une racine δ de Δ et non pas la notation $\sqrt{\Delta}$ (*cf.* exercice 7 page 5).

www **Ex 59 :** Soit $\theta \in \,]0, \pi[$. Résoudre l'équation : $z^2 - 2\,z\,\cos\theta + 1 = 0$. p.51

www **Ex 60 :** Résoudre l'équation : $6\,z^2 - (5-i)\,z + 2 - \dfrac{5\,i}{6} = 0$. p.51

www **Ex 61 :** Résoudre l'équation : $(2\,z-1)\,(3\,z-2) = 0$. p.52

www **Ex 62 :** Dans cet exercice, on suppose $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ ainsi que $b^2 - 4\,a\,c < 0$. Que peut-on dire des racines (complexes) de l'équation $a\,z^2 + b\,z + c = 0$? p.52

www **Ex 63 :** Soit $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$. Si l'équation $a\,z^2 + b\,z + c = 0$ possède deux racines distinctes conjuguées, peut-on en déduire que a, b et c sont réels ? p.52

www **Ex 64 :** Soit a, b, c, a', b', c' des complexes quelconques, ainsi que :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & a\,z^2 + b\,z + c \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & a'\,z^2 + b'\,z + c' \end{array}.$$

En supposant qu'il existe trois complexes distincts z_1, z_2 et z_3 tels que :

$$f(z_1) = g(z_1) \qquad f(z_2) = g(z_2) \quad \text{et} \quad f(z_3) = g(z_3),$$

montrer $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$. p.52

c) Factorisation du trinôme

Comme dans le cas réel, on peut maintenant relier racines et factorisation.
Dans cette partie, on a toujours $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$.

www **Ex 65 :** Montrer qu'il existe $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$ (pas forcément distincts) tels que :
$$\forall z \in \mathbb{C} \quad a\,z^2 + b\,z + c = a\,(z - z_1)\,(z - z_2).$$
p.52

www **Ex 66 :** Soit $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$ (pas forcément distincts) tels que :
$$\forall z \in \mathbb{C} \quad a\,z^2 + b\,z + c = a\,(z - z_1)\,(z - z_2).$$
Quelles sont les racines de l'équation : $a\,z^2 + b\,z + c = 0$? p.53

Résultat Dans les exercices précédents, on a donc prouvé que si a, b et c sont trois complexes tels que $a \neq 0$, alors l'équation $a\,z^2 + b\,z + c = 0$

- possède comme racines les complexes distincts z_1 et z_2 si, et seulement si,
$$\forall z \in \mathbb{R} \quad a\,z^2 + b\,z + c = a\,(z - z_1)\,(z - z_2) \ ;$$
- possède comme racine le seul complexe z_0 si, et seulement si,
$$\forall z \in \mathbb{R} \quad a\,z^2 + b\,z + c = a\,(z - z_0)^2 \ ;$$
c'est pourquoi on dit dans ce cas que z_0 est racine double du trinôme.

www **Ex 67 :** Soit a, b, c, a', b' et c' des complexes tels que $a \neq 0$ et $a' \neq 0$.
On suppose, que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :
$$a\,z^2 + b\,z + c = 0 \iff a'\,z^2 + b'\,z + c' = 0.$$
Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $a' = k\,a$, $b' = k\,b$ et $c' = k\,c$. p.53

www **Ex 68 :** L'exercice précédent avait-il un équivalent dans la première partie ? p.54

d) Relations entre les coefficients et les racines

Comme dans le cas réel, on dispose de la proposition suivante.

Proposition 5

Si l'on désigne par z_1 et z_2 les racines distinctes (*i.e.* $z_1 \neq z_2$) ou confondues (*i.e.* $z_1 = z_2$) de l'équation $a\,z^2 + b\,z + c = 0$, alors on a :
$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad z_1\,z_2 = \frac{c}{a}.$$

www **Ex 69 :** *(Démonstration de la proposition précédente)*

1. Expliciter $s = z_1 + z_2$ et $p = z_1\,z_2$ en fonction de a, b et c.

2. Que vaut Δ en fonction de z_1 et z_2 ? p.54

www **Ex 70 :** On suppose ici $a \in \mathbb{R}^*$ et aussi que les deux racines de l'équation :

$$a\,z^2 + b\,z + c = 0$$

sont conjuguées. Peut-on en déduire $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$? p.54

Comme dans le cas réel, on a aussi le résultat suivant, qui se démontre exactement de la même façon.

Proposition 6

Si s et p sont deux complexes donnés, alors les complexes z_1 et z_2 vérifient :

$$z_1 + z_2 = s \quad \text{et} \quad z_1\,z_2 = p$$

si, et seulement si, ce sont les racines de l'équation : $z^2 - s\,z + p = 0$.

Diverses utilisations possibles Comme nous avons vu dans dans le cas réel, les résultats précédents ont plusieurs types d'application.

- Tout d'abord, il permettent d'exprimer la somme et le produit des racines d'une équation du second degré en fonction de ses coefficients sans avoir à expliciter ces racines. C'est l'utilisation essentielle.
- À l'inverse, ils permettent aussi de déterminer rapidement et efficacement deux nombres complexes dont on connaît la somme et le produit, sans avoir à « tirer l'une de inconnues en fonction de l'autre ».
- Parfois, ils peuvent aussi permettent de trouver sans calcul les racines d'une équation lorsque, avec les notations classiques, on a la chance de repérer que les complexes $-\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$ sont la somme et le produit de deux nombres.
- Enfin, ils peuvent servir d'outil de vérification lors d'un calcul de racines d'une équation du second degré : il est plus facile de faire la somme et le produit de deux complexes plutôt que de les substituer dans l'équation.

www **Ex 71 :** Résoudre l'équation : $z^2 - (1 - 2\,i)\;z - 2\,i = 0$. p.55

www **Ex 72 :** Soit $\theta \in \,]0, \pi[$. Résoudre l'équation : $z^2 - 2\,z\,\cos\theta + 1 = 0$. p.55

www **Ex 73 :** Résoudre l'équation : $6\,z^2 - (5 - i)\;z + 2 - \dfrac{5\,i}{6} = 0$ et vérifier. p.55

Méthode Encore une fois, plutôt que d'hésiter sur la forme de l'équation de la proposition 6, et de tirer à pile ou face entre :

$$z^2 \pm s\,z \pm p = 0 \quad \text{et} \qquad z^2 \pm p\,z \pm s = 0,$$

un simple développement (de tête maintenant, j'espère) de :

$$(z - z_1)\,(z - z_2) = 0,$$

fournit le résultat correct de façon sûre et sans la moindre angoisse !

4. En guise de conclusion

- Comme vous vous en êtes rendu compte, les notions et propriétés étudiées dans cette seconde partie concernant les trinômes à coefficients complexes (forme canonique, discriminant, expression des racines, relations entre coefficients et racines) sont les généralisations des propriétés correspondantes pour les trinômes à coefficients réels.
- Évidemment on n'a pas parlé de tout ce qui utilise la notion de signe et plus généralement la relation de comparaison (relation d'ordre), donc pas d'étude du signe des racines, de localisation des racines voire de variations de fonctions, pas de formule avec $\sqrt{\Delta}$.
- Pour ce qui est commun, les méthodes de démonstration et de mémorisation sont souvent identiques et il est possible de traiter directement le cas complexe puis de voir alors le domaine réel comme un cas particulier ; mais cela suppose d'avoir étudié les nombres complexes, ce qui arrive plus tard dans la scolarité.
- Outre que le point de vue adopté ci-dessus permet, de commencer à étudier ce chapitre avant la classe de TS, il fournit une autre piste de travail : relire « horizontalement » ce chapitre, mentalement de préférence, en rapprochant les propriétés correspondantes dans les deux parties en mettant en évidence les ressemblances et les différences : c'est aussi une méthode d'appropriation d'un cours de mathématiques.

III. Solutions des exercices

Exercice 1 :

1. Puisque la propriété $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, elle est vraie en particulier pour $x = 0$, ce qui donne $c = 0$.
   Comme $c = 0$, l'hypothèse devient :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad a\,x^2 + b\,x = 0.$$
   En prenant successivement $x = -1$ et $x = 1$, on en déduit :
   $$a + b = 0 \quad \text{et} \quad a - b = 0,$$
   ce qui, par somme et différence, donne directement :
   $$a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0.$$

2. Par différence, on obtient :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad (a - a')\,x^2 + (b - b')\,x + (c - c') = 0.$$
   En posant :
   $$\alpha = a - a', \quad \beta = b - b' \quad \text{et} \quad \gamma = c - c',$$
   on a trois réels α, β et γ tels que :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \alpha\,x^2 + \beta\,x + \gamma = 0.$$
   La question précédente nous dit alors que l'on a :
   $$\alpha = \beta = \gamma = 0$$
   et donc :
   $$a = a', \quad b = b' \quad \text{et} \quad c = c'.$$

Exercice 2 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} a\,x^2 + b\,x + c &= a\Big(x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a}\Big) \\ &= a\bigg(\Big(x + \frac{b}{2\,a}\Big)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4\,a^2}\bigg) \\ &= a\bigg(\Big(x + \frac{b}{2\,a}\Big)^2 - \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a^2}\bigg)\cdot \end{aligned}$$

Ainsi on peut prendre :

$$\beta = \frac{b}{2\,a} \quad \text{et} \quad \gamma = -\frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a^2}\cdot$$

Exercice 3 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, a :

$$\begin{aligned} 2\,x^2 + 5\,x + 6 &= 2\Big(x^2 + \frac{5}{2} + 3\Big) \\ &= 2\left(\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + 3 - \frac{25}{16}\right) \\ &= 2\left(\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{23}{16}\right) \cdot \end{aligned}$$

Exercice 4 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x^2 - 2\,x\,\cos\theta + 1 = (x - \cos\theta)^2 + 1 - \cos^2\theta$$

et donc :

$$x^2 - 2\,x\,\cos\theta + 1 = (x - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta.$$

Exercice 5 :

Pour $x \in \mathbb{R}$, la forme canonique s'écrit :

$$\begin{aligned} a\,x^2 + b\,x + c &= a\left(\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a^2}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\,a^2}\right) \cdot \end{aligned}$$

- Supposons $\Delta \geqslant 0$. On peut alors trouver un réel δ tel que $\delta^2 = \Delta$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

  $$\begin{aligned} a\,x^2 + b\,x + c &= a\left(\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{\delta^2}{4\,a^2}\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2\,a} - \frac{\delta}{2\,a}\right)\left(x + \frac{b}{2\,a} + \frac{\delta}{2\,a}\right) \cdot \end{aligned}$$

  Il est alors immédiat que l'équation :

  $$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

  possède (au moins) une racine, par exemple :

  $$x = -\frac{b}{2\,a} + \frac{\delta}{2\,a} \cdot$$

- Réciproquement, supposons $\Delta < 0$ et montrons que l'équation donnée ne possède aucune racine réelle. Pour $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

  $$\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\,a^2} \geqslant -\frac{\Delta}{4\,a^2} > 0.$$

  Par suite, nous avons :

  $$\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\,a^2} \neq 0.$$

Comme $a \neq 0$, on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a\,x^2 + b\,x + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\,a^2}\right) \neq 0,$$

ce qui prouve le résultat.

Exercice 6 :

Comme l'équation possède une racine, on a $\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$.

- Supposons $\Delta > 0$ et désignons par $\delta \neq 0$ une racine de Δ.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors (après avoir refait le calcul) :

  $$a\,x^2 + b\,x + c = a\Big(x + \frac{b}{2\,a} - \frac{\delta}{2\,a}\Big)\Big(x + \frac{b}{2\,a} + \frac{\delta}{2\,a}\Big).$$

  Comme un produit de réels est nul si, et seulement si, l'un des deux est nuls, on en déduit que l'équation (E) possède exactement deux racines (distinctes) qui sont

  $$x_1 = \frac{-b + \delta}{2\,a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \delta}{2\,a}\cdot$$

- Si $\Delta = 0$, alors pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

  $$a\,x^2 + b\,x + c = a\Big(x + \frac{b}{2\,a}\Big)^2$$

  et l'équation (E) possède une unique racine qui est $x_0 = -\dfrac{b}{2\,a}\cdot$

  Remarque cette factorisation, dans le cas $\Delta = 0$, se déduit évidemment de celle obtenue dans le cas $\Delta > 0$ en remplaçant Δ et donc δ par 0.

Exercice 7 :

Dans le cas $\Delta > 0$, vous écriviez les racines sous la forme :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\,a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\,a}\cdot$$

Ces formules donnent évidemment le même ensemble de racines. En revanche , il faut bien garder à l'esprit que $\sqrt{\Delta}$ est la racine positive de Δ. Si une simplification donne par exemple $\Delta = \sin^2 t$ avec $t \in \mathbb{R}$, alors on peut écrire que les racines sont :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\sin^2 t}}{2\,a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\sin^2 t}}{2\,a}$$

ou que ce sont :

$$x_1 = \frac{-b - \sin t}{2\,a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sin t}{2\,a}.$$

Mais attention de ne pas laisser penser que cela est dû à la simplification :

$$\sqrt{\sin^2 t} = \sin t$$

qui est fausse lorsque $\sin t < 0$. Le moins risqué dans un tel cas est donc d'utiliser $\delta = \sin t$ qui est bien *une* racine de $\Delta = \sin^2 t$.

Exercice 8 :

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = 4\,(\cos^2\theta - 1) = -4\,\sin^2\theta.$$

Avec l'hypothèse $\theta \in \,]0,\pi[$ on a $\Delta < 0$, ce qui prouve que l'équation donnée ne possède aucune solution réelle .

Exercice 9 :

Pour $x \in \mathbb{R}$, la mise sous forme canonique donne :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2\,x\,\cos\theta + \cos 2\theta \\ &= (x - \cos\theta)^2 + \cos 2\theta - \cos^2\theta \\ &= (x - \cos\theta)^2 - \sin^2\theta. \end{aligned}$$

Il est alors immédiat que $f(x) = 0$ si, et seulement si :

$$x - \cos\theta = \pm\sin\theta \quad \text{ou encore} \quad x = \cos\theta \pm \sin\theta.$$

Par suite l'équation donnée :

- possède deux solutions distinctes lorsque $\sin\theta \neq 0$, c'est-à-dire lorsque $\theta \notin \{k\,\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, ce que l'on peut aussi écrire $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$.
- possède une unique solution lorsque $\sin\theta = 0$, c'est-à-dire lorsque $\theta \in \{k\,\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, ce que l'on peut aussi écrire $\theta \equiv 0\ [\pi]$.

Exercice 10 :

Comme un produit de nombres réels est nul si, et seulement si, l'un est nul, il est immédiat que les racines de cette équation sont :

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2}{3}\cdot$$

Exercice 11 :

Comme $b^2 \geqslant 0$, l'hypothèse nous donne :

$$\Delta = b^2 - 4\,ac > 0,$$

ce qui prouve que l'équation $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ possède exactement deux racines réelles.

Exercice 12 :

Comme, pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$a\,x^2 + b\,x = x\,(a\,x + b)$$

on en déduit que :

- lorsque $b = 0$, l'équation $a\,x^2 + b\,x = 0$ possède 0 comme seule racine ;
- lorsque $b \neq 0$, l'équation $a\,x^2 + b\,x = 0$ possède deux racines qui sont 0 et $-\dfrac{b}{a}\cdot$

Exercice 13 :

- Supposons $a \neq 0$. Alors on sait que l'équation du second degré :

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

possède 0, 1 ou 2 solutions réelles. Comme ici on nous dit qu'il existe trois réels distincts x_1, x_2 et x_3 tels que :

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0,$$

on aboutit à une contradiction, ce qui prouve que $a = 0$.

Supposons de même $b \neq 0$. Alors l'équation :

$$b\,x + c = 0$$

possède une unique solution réelle qui est $x = -c/b$.
Comme ici on nous dit qu'il existe trois réels distincts x_1, x_2 et x_3 tels que :

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0,$$

on aboutit à une contradiction. Par suite on a $b = 0$.

Enfin, si $c \neq 0$ alors la fonction :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & c \end{array}$$

est constante, non nulle et ne peut donc s'annuler ; par suite, on a $c = 0$.

- Soit $h = f - g$ qui est donc définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = (a - a')\,x^2 + (b - b')\,x + (c - c').$$

L'hypothèse nous dit alors que :

$$h(x_1) = h(x_2) = h(x_3) = 0.$$

Comme on a :

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \alpha\,x^2 + \beta\,x + \gamma \end{array}$$

avec :

$$\alpha = (a - a'), \quad \beta = (b - b') \quad \text{et} \quad \gamma = (c - c'),$$

la question précédente nous dit que :

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

et donc que :

$$a = a', \quad b = b' \quad \text{et} \quad c = c'.$$

- C'est encore un résultat d'identification des coefficients mais sous une forme bien plus forte que celle que l'on avait déjà rencontrée dans l'exercice 1.
En effet le résultat établi ici est bien plus efficace que le précédent dans la mesure où les hypothèses sont beaucoup plus *faibles* pour un résultat identique.
    - Dans l'exercice 1, on supposait les fonctions égales (pour tout x réel).
    - Dans cet exercice, on les suppose seulement égales pour trois valeurs de la variable.

Exercice 14 :

Soit $x \in \mathbb{Z}$ solution de l'équation :

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0.$$

On a donc :

$$x\,(a\,x + b) = -c.$$

Comme x, a et b sont entiers, alors $a\,x + b$ est entier, ce qui entraîne que x est un entier divisant c.

Exercice 15 :

- Soit $b \in \mathbb{Z}$ telle que l'équation :

  $$2\,x^2 + b\,x + 11 = 0$$

  possède une racine entière et soit x_1 une telle racine. On a alors :

  $$(2\,x_1 + b)\,x_1 = -11.$$

  Comme $2\,x_1 + b$ est aussi élément de $\mathbb{Z}$, on en déduit que x_1 est un diviseur de 11. Par suite, on a :

  $$x_1 = \varepsilon \quad \text{ou} \quad x_1 = 11\,\varepsilon \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \pm 1.$$

  * Si $x_1 = \varepsilon$, alors, en remplaçant dans l'équation, on obtient :

    $$\varepsilon\,b + 13 = 0 \quad \text{et donc} \quad b = -13\,\varepsilon.$$

  * Si $x_1 = 11\,\varepsilon$, alors, en remplaçant dans l'équation, on obtient :

    $$11 \times 23 + 11\,b\,\varepsilon = 0 \quad \text{et donc} \quad b = -23\,\varepsilon$$

  On en déduit que, si (E) possède une solution entière, alors :

  $$b = \pm 13 \quad \text{ou} \quad b = \pm 23.$$

- Réciproquement, supposons $b = \pm 13$ ou $b = \pm 23$.

  * Si $b = 13\,\varepsilon$ (avec $\varepsilon = \pm 1$), on obtient :

    $$2\,x^2 + 13\,\varepsilon\,x + 11 = (2x + 11\,\varepsilon)\,(x + \varepsilon)$$

    qui possède l'entier $-\varepsilon$ comme racine.
  * Si $b = 23\,\varepsilon$ (avec $\varepsilon = \pm 1$), on obtient :

    $$2\,x^2 + 23\,\varepsilon\,x + 11 = (x + 11\,\varepsilon)\,(2\,x + \varepsilon)$$

    qui possède l'entier $-11\,\varepsilon$ comme racine.

Conclusion : on a ainsi prouvé que l'équation :

$$2\,x^2 + b\,x + 11 = 0$$

possède une racine entière si, et seulement si, $b = \pm 13$ ou $b = \pm 23$.

Exercice 16 :

Soit $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$ le discriminant de l'équation :

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0. \tag{E}$$

- **Premier cas :** $\Delta > 0$ Alors on a vu dans l'exercice 6 que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$

où x_1 et x_2 sont les deux racines de l'équation (E).
- **Second cas :** $\Delta = 0$ Alors on a vu dans l'exercice 6 que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x - x_0)^2$$

où x_0 est l'unique racine de l'équation (E).

Exercice 17 :

1. Étant donné que le membre de droite est factorisé et que $a \neq 0$, il est immédiat que :
   - si $x_1 \neq x_2$, alors l'équation a (exactement) deux racines qui sont x_1 et x_2 ;
   - si $x_1 = x_2$, alors l'équation a une unique racine qui est $x_1 = x_2$.
2. D'après ce qui précède, cette fonction polynomiale de degré 2 possède au moins une racine et cela entraîne (*cf.* exercice 5) que son discriminant est positif.

Exercice 18 :

- Supposons $\Delta \leqslant 0$. La mise sous forme canonique nous donne alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\,a^2}\right).$$

L'hypothèse $\Delta \leqslant 0$ nous donne alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\,a^2} \geqslant \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0.$$

Par suite, $f(x)$ est du signe de a pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Supposons $\Delta > 0$. L'équation $f(x) = 0$ possède alors deux racines distincte x_1 et x_2, et nous supposerons $x_1 < x_2$.
La mise sous forme factorisée nous donne alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$

et, de la règle des signes, on déduit :

  * si $x \in \,]x_1, x_2[$, alors $(x - x_1)\,(x - x_2) < 0$;
  * si $x \in \,]-\infty, x_1[\,\cup\,]x_2, +\infty[$, alors $(x - x_1)\,(x - x_2) > 0$;
  * si $x = x_1$ ou $x = x_2$, alors $(x - x_1)\,(x - x_2) = 0$.

Par suite,

* La fonction f prend des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives ;
* la fonction f est du signe de $-a$ entre les racines, et du signe opposé à l'extérieur de ces racines.

Il est alors intéressant d'étudier le signe de $a\,f(x)$ qui est du signe de $(x-x_1)\,(x-x_2)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a par exemple :

$$a\,f(x) < 0 \Longleftrightarrow x \in \left]x_1, x_2\right[$$

ou aussi :

$$a\,f(x) \leqslant 0 \Longleftrightarrow x \in [x_1, x_2].$$

Exercice 19 :

Soit a, b et c trois réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a\,x^2 + b\,x + c \geqslant 0.$$

* Supposons $a \neq 0$. Alors la fonction :

  $$f : x \mapsto a\,x^2 + b\,x + c$$

  est un trinôme du second degré qui ne prend aucune valeur strictement négative ; par suite, son discriminant ne peut être strictement positif et donc :

  $$\Delta = b^2 - 4\,a\,c \leqslant 0.$$

* Supposons $a = 0$. Alors la fonction :

  $$f : x \mapsto b\,x + c$$

  est une fonction affine ; comme par hypothèse cette fonction reste positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $b = 0$. Il est alors immédiat de vérifier que $b^2 - 4\,a\,c = 0$ et donc :

  $$\Delta = b^2 - 4\,a\,c \leqslant 0.$$

Ainsi, dans les deux cas, on a prouvé :

$$b^2 - 4\,a\,c \leqslant 0.$$

Exercice 20 :

1. Comme x_1 et x_2 sont les deux racines distinctes ou confondues de l'équation $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, nous avons vu que l'on a :

   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x-x_1)\,(x-x_2)\,.$$

   En identifiant, on en déduit :

   $$\begin{array}{ll} \text{coeff. de } x & b = -a\,(x_1 + x_2) \\ \text{coeff. constant} & c = \quad a\,x_1\,x_2 \end{array}$$

   et, comme $a \neq 0$, on obtient :

   $$s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad p = x_1\,x_2 = \frac{c}{a}\cdot$$

2. En utilisant les relations de la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4\,a\,c \\ &= a^2\,(x_1+x_2)^2 - 4\,a^2\,x_1 x_2 \\ &= a^2\,(x_1-x_2)^2\,.\end{aligned}$$

   On peut remarquer que ce résultat n'est pas étonnant puisque l'on a alors $\Delta \geqslant 0$ et que $\Delta = 0$ si, et seulement si, $x_1 = x_2$.

Exercice 21 :

1. Comme le produit du coefficient de x^2 par le terme constant est strictement négatif, cette équation possède deux racines réelles.
2. Étant donné que l'on a :

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2\,x_1\,x_2$$

   et que les relations entre coefficients et racines donnent :

$$x_1 + x_2 = -\sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_1\,x_2 = -1,$$

   on en déduit :

$$x_1^2 + x_2^2 = 5.$$

3. Étant donné que pour $k \in \{1,2\}$ on a :

$$x_k^2 = -\sqrt{3}\,x_k + 1$$

   et donc

$$x_k^3 = -\sqrt{3}\,x_k^2 + x_k,$$

   on en déduit :

$$x_1^3 + x_2^3 = -\sqrt{3}\,\left(x_1^2 + x_2^2\right) + (x_1 + x_2)\,.$$

   En utilisant la question précédente et la relation :

$$x_1 + x_2 = -\sqrt{3}$$

   on obtient :

$$x_1^3 + x_2^3 = -6\sqrt{3}.$$

Exercice 22 :

- Supposons que x_1 et x_2 sont les racines de l'équation $x^2 - s\,x + p = 0$. Les relations donnant la somme et le produit des racines d'une équation du second degré en fonction de ses coefficients entraînent :

$$x_1 + x_2 = s \quad \text{et} \quad x_1\,x_2 = p.$$

- Réciproquement, soit x_1 et x_2 deux nombres tels que :

$$x_1 + x_2 = s \quad \text{et} \quad x_1\,x_2 = p.$$

  Les nombres x_1 et x_2 sont de façon évidente les solutions de l'équation :

$$(x - x_1)\,(x - x_2) = 0.$$

En développant le membre de gauche, cette équation s'écrit aussi :

$$x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1\,x_2 = 0.$$

ou encore :

$$x^2 - s\,x + p = 0$$

ce qui termine la démonstration.

Exercice 23 :

Deux réels ont pour somme 4 et pour produit -1 si, et seulement si, ce sont les racines de :

$$0 = x^2 - 4\,x - 1 = (x-2)^2 - 5.$$

Par suite, ces réels vérifient $x - 2 = \pm\sqrt{5}$ et ce sont donc :

$$2 - \sqrt{5} \quad \text{et} \quad 2 + \sqrt{5}.$$

Exercice 24 :

Deux réels ont pour somme -1 et pour produit 4 si, et seulement si, ce sont les racines de l'équation :

$$x^2 + x + 4 = 0.$$

Comme le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = -15 < 0$$

elle n'a pas de racine, et il n'existe donc pas de réels vérifiant ces relations.

Exercice 25 :

Étant donné que les entiers 13 et 2 vérifient :

$$13 + 2 = 15 \quad \text{et} \quad 13 \times 2 = 26$$

les nombres 13 et 2 sont les racines de l'équation donnée qui est :

$$x^2 - 15\,x + 26 = 0.$$

Exercice 26 :

Soit $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$ tels que $x \leqslant y$. Comme il s'agit de nombres positifs, on en déduit par produit $x^2 \leqslant y^2$, ce qui prouve le résultat.

Remarque Quand on connaît la notion de dérivée, on peut aussi l'utiliser.

Exercice 27 :

Cette fonction n'est pas croissante car en prenant :

$$x = -1 \quad \text{et} \quad y = 0,$$

on a :

$$x \leqslant y \quad \text{et} \quad f(x) = 1 > 0 = f(y).$$

Exercice 28 :

Soit $x \in]-\infty, 0]$ et $y \in]-\infty, 0]$ tels que $x \leqslant y$. On en déduit :

$$0 \leqslant -y \leqslant -x$$

et le résultat de la question précédente nous dit que :

$$(-y)^2 \leqslant (-x)^2 \quad \text{et donc} \quad y^2 \leqslant x^2$$

ce qui prouve que v est décroissante.

Remarque Quand on connaît la notion de dérivée, on peut aussi l'utiliser.

Exercice 29 :

Le raisonnement de Pierre est complètement faux car une fonction (une fonction constante par exemple) peut être simultanément croissante et décroissante.

On peut prouver que cette fonction n'est pas décroissante en prenant :

$$x = 0 \quad \text{et} \quad y = 1,$$

puisque l'on a alors :

$$x \leqslant y \quad \text{et} \quad f(x) = 0 < 1 = f(y).$$

Exercice 30 :

- À l'exercice 27, on a déjà démontré que f n'est pas croissante.
- On démontre de même qu'elle n'est pas décroissante en prenant :

  $$x = 0 \quad \text{et} \quad y = 1,$$

  puisque l'on a alors :

  $$x \leqslant y \quad \text{et} \quad f(x) = 0 < 1 = f(y).$$

On a ainsi prouvé :

$$\text{« } f \text{ non croissante »} \quad \text{et} \quad \text{« } f \text{ non décroissante »}$$

qui est la négation de :

$$\text{« } f \text{ croissante »} \quad \text{ou} \quad \text{« } f \text{ décroissante ».}$$

Par suite, f n'est pas monotone.

Exercice 31 :

Comme la fonction $f_1 : x \to x^2$ est monotone sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$, la fonction $f_a : x \to a\,x^2$, qui est égale à $a f_1$, est aussi monotone sur chacun des ces intervalles.

- Si $a > 0$, alors f_1 et f_a ont même sens de variations sur chacun de ces intervalles.
- Si $a < 0$, alors f_1 et f_a ont des sens de variations opposés sur chacun de ces intervalles.

On en déduit les tableaux de variations.

- Si $a > 0$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f_a	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque Comme f_a est le produit de $f_1 : x \mapsto x^2$, qui tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$, par une constante strictement positive, ses limites en $\pm\infty$ sont égales à $+\infty$.

- Si $a < 0$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f_a	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Remarque Comme f_a est le produit de $f_1 : x \mapsto x^2$, qui tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$, par une constante strictement négative, ses limites en $\pm\infty$ sont égales à $-\infty$.

On peut aussi évidemment étudier ces variations à l'aide de la dérivée.

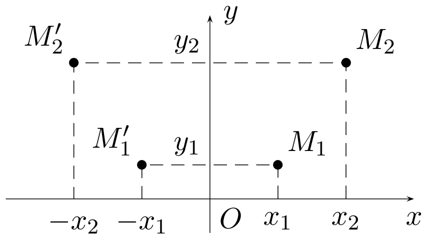
Exercice 32 :

- Γ_a contient évidemment l'origine du repère puisque $O\left|\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right.$ vérifie son équation.

  Comme $f_a'(0) = 0$, la pente de la tangente à Γ_a en O est nulle, ce qui équivaut à dire que cette tangente est parallèle à Ox et donc ici que c'est l'axe Ox.

- Comme f_a est une fonction paire, le point $M\left|\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right.$ appartient à Γ_a si, et seulement si,le point $M'\left|\begin{smallmatrix}-x\\y\end{smallmatrix}\right.$appartient à Γ_a.

  Par suite, toute courbe Γ_a est symétrique par rapport l'axe $(O, \vec{\jmath})$ ou encore, comme on dit couramment, par rapport à l'axe Oy.

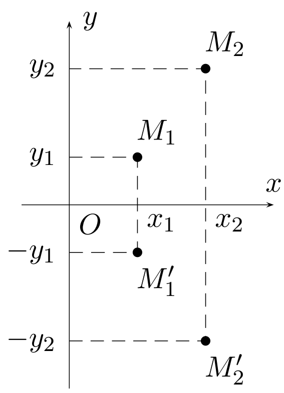


  En cas de doute, le dessin ci-dessus peut permettre de vous y retrouver.

- Lorsque $a > 0$ tout point de Γ_a a une ordonnée positive et donc Γ_a se trouve dans le demi-plan situé au dessus de l'axe $(O, \vec{\imath})$ encore appelé l'axe Ox.

- Comme on passe de l'équation de Γ_a à celle de Γ_{-a} en changeant y en $-y$, le point $M\left|\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right.$ appartient à Γ_a si, et seulement si,le point $M'\left|\begin{smallmatrix}x\\-y\end{smallmatrix}\right.$ appartient à Γ_a.

  Par suite, pour tout a, la courbe Γ_{-a} est symétrique de la courbe Γ_a par rapport à l'axe Ox.

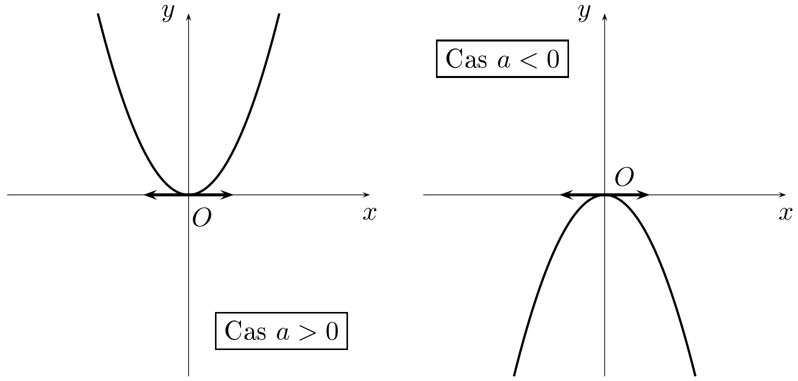


Exercice 33 :

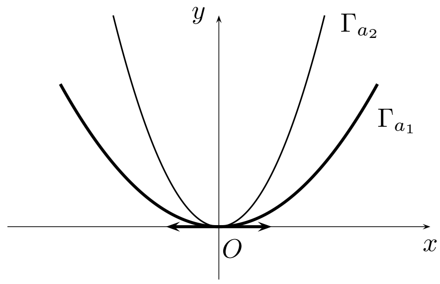
En utilisant les remarques suivantes :

- chaque courbe Γ_a passe par l'origine, et elle est symétrique par rapport à Oy,
- chaque courbe Γ_a est tangente en O à l'axe Ox,
- si $a > 0$ la courbe Γ_a se trouve au dessus de Ox,

il est aisé d'avoir l'allure des courbes Γ_a.



Si $0 < a_1 \leqslant a_2$, alors la courbe Γ_{a_1} est « en dessous » de la courbe Γ_{a_2}.



Exercice 34 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$f'(x) = 2\,a\,x + b = 2\,a\left(x + \frac{b}{2a}\right)$$

dont le signe dépend de celui de a et de celui de $x + \frac{b}{2a}$.

- Tableau de variations si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	$\nearrow$	

- Tableau de variations si $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	$\searrow$	

2. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a :

$$f\Big(-\frac{b}{2a}+h\Big) = a\Big(-\frac{b}{2a}+h\Big)^2 + b\Big(-\frac{b}{2a}+h\Big) + c$$

$$= a\,h^2 + \Big(c - \frac{b^2}{4a}\Big).$$

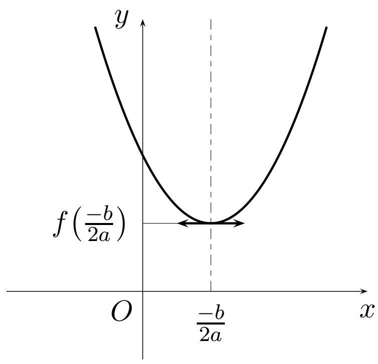
Comme l'expression trouvée est paire en h, on en déduit :

$$f\Big(-\frac{b}{2a}+h\Big) = f\Big(-\frac{b}{2a}-h\Big)$$

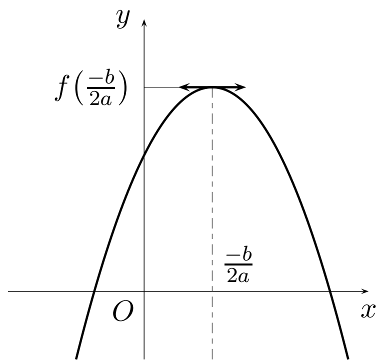
ce qui prouve la symétrie demandée.

3. On en déduit l'allure de la courbe Γ.

$\boxed{\text{Cas } a > 0}$



$\boxed{\text{Cas } a < 0}$



Exercice 35 :

1. La règle habituellement utilisée dans le secondaire est, qu'en $\pm\infty$, la fonction f « se comporte comme » la fonction $x \mapsto a\,x^2$, *i.e.* les deux fonctions ont même limite.
2. Justifions le résultat précédent. Pour tout $x \neq 0$, nous avons :

$$a\,x^2 + b\,x + c = a\,x^2\left(1 + \frac{b}{a\,x} + \frac{c}{a\,x^2}\right).$$

Comme on a évidemment :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{b}{a\,x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{c}{a\,x^2} = 0,$$

les théorèmes généraux nous donnent :

$$\lim_{x\to\pm\infty} 1 + \frac{b}{a\,x} + \frac{c}{a\,x^2} = 1.$$

Comme $\lim_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty$, on en déduit :

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2\left(1 + \frac{b}{a\,x} + \frac{c}{a\,x^2}\right) = +\infty.$$

Par suite,

- si $a > 0$, alors $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$;
- si $a < 0$, alors $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$;

3. On peut alors compléter les tableaux de variations précédents.

- Tableau de variations si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

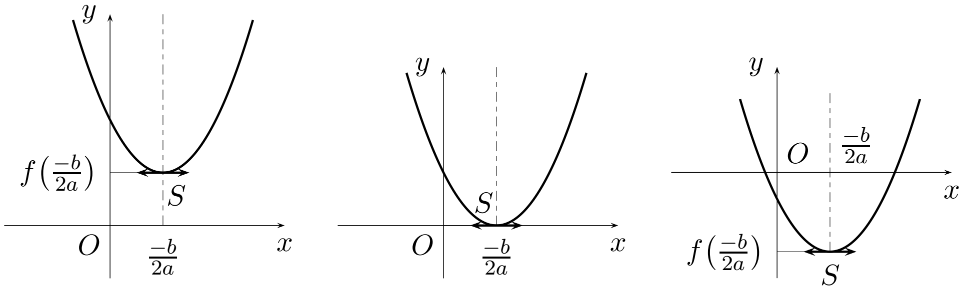
- Tableau de variations si $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 36 :

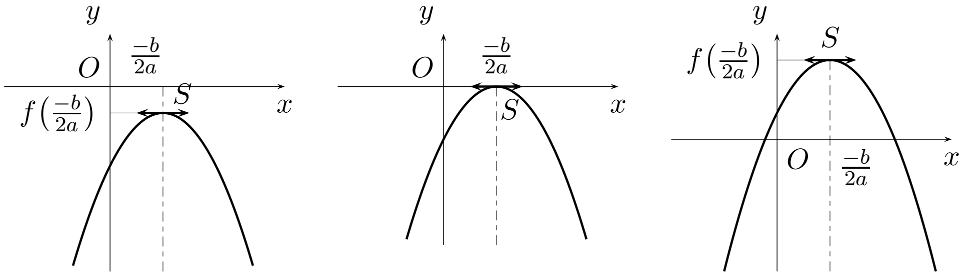
1. Diverses allures possibles

- Cas $a > 0$



Aucune racine | Une seule racine | Deux racines

- Cas $a < 0$



Aucune racine | Une seule racine | Deux racines

2. Avec les notations des dessins précédents, l'ordonnée de S est :

$$f\left(-\frac{b}{2\,a}\right) = a\left(-\frac{b}{2\,a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2\,a}\right) + c \;= c - \frac{b^2}{4\,a} = \frac{4\,a\,c - b^2}{4\,a} = -\frac{\Delta}{4a}.$$

On retrouve ainsi graphiquement des résultats connus.

- Lorsque $a > 0$, la courbe Γ, d'équation $y = a\,x^2 + b\,x + c$, coupe l'axe Ox :
  - ∗ en deux points distincts si, et seulement si, l'ordonnée de S est strictement négative, ce qui correspond à $\Delta > 0$;
  - ∗ en un seul point si, et seulement si, l'ordonnée de S est nulle, ce qui correspond à $\Delta = 0$;
  - ∗ en aucun point si, et seulement si, l'ordonnée de S est strictement positive, ce qui correspond à $\Delta < 0$.
- Lorsque $a < 0$, la courbe Γ coupe l'axe Ox :
  - ∗ en deux points distincts si, et seulement si, l'ordonnée de S est strictement positive ; comme $a < 0$, cela correspond à $\Delta > 0$;
  - ∗ en un seul point si, et seulement si, l'ordonnée de S est nulle, ce qui correspond à $\Delta = 0$;
  - ∗ en aucun point si, et seulement si, l'ordonnée de S est strictement négative ; comme $a < 0$, cela correspond à $\Delta < 0$.

3. - On sait que la parabole d'équation $y = a\,x^2 + b\,x + c$ possède la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$ comme axe de symétrie.
   - Comme x_1 et x_2 sont les abscisses de deux points ayant même ordonnée, leur milieu, d'abscisse $\frac{x_1+x_2}{2}$ se trouve sur cet axe de symétrie.

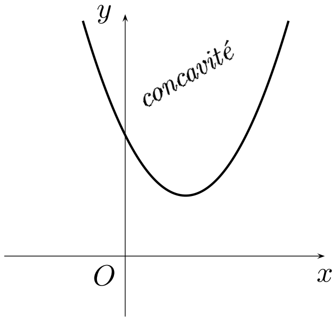
Par suite, on « voit sur le dessin » que :

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a} \quad \text{et donc} \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}\cdot$$

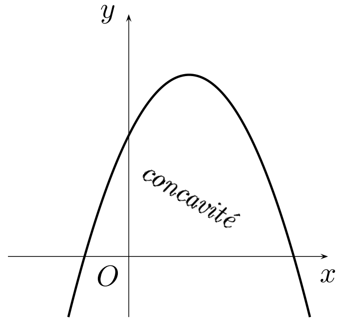
Exercice 37 :

- Pour le signe de a.
  - ∗ Si la concavité de la parabole est vers le haut, alors on a $a > 0$.
  - ∗ Si la concavité de la parabole est vers le bas, alors on a $a > 0$.

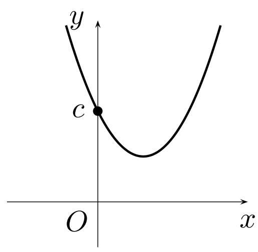
$\boxed{\text{Cas } a > 0}$



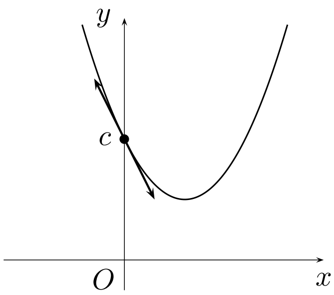
$\boxed{\text{Cas } a < 0}$



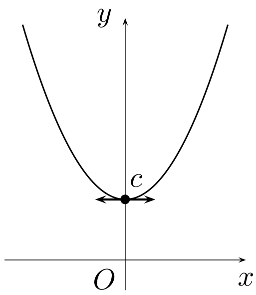
- Le réel $c = f(0)$ est l'ordonnée du point d'intersection de Γ avec l'axe Oy.



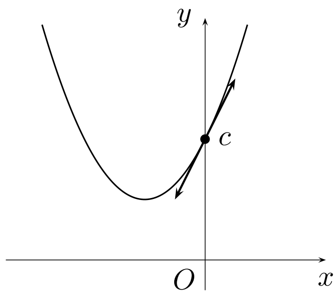
- Le réel $b = f'(0)$ est la pente de la tangente à Γ en son point d'intersection avec Oy.



$\boxed{\text{Ici, } b < 0}$



$\boxed{\text{Ici, } b = 0}$



$\boxed{\text{Ici, } b > 0}$

- Le signe de Δ est évidemment lié au nombre de points d'intersection de Γ avec l'axe Ox.
  - ∗ Lorsqu'il n'y a aucun point d'intersection de Γ avec l'axe Ox, on a alors $\Delta < 0$.

* Lorsqu'il y a un seul point d'intersection de Γ avec l'axe Ox, on a $\Delta = 0$;
* Lorsqu'il y a deux points d'intersection de Γ avec l'axe Ox, on a alors $\Delta > 0$.

Exercice 38 :

1. Pour cette équation :

   La somme des racines vaut $-\dfrac{b}{a}$; Le produit des racines vaut $\dfrac{c}{a}\cdot$

2. C'est le produit qui nous permet d'avoir des informations sur le signe des racines.

   - Si $\dfrac{c}{a}$ est positif, alors les deux racines sont de même signe.
   - Si $\dfrac{c}{a}$ est négatif, alors les deux racines sont de signes contraires.
   - Si $\dfrac{c}{a} = 0$, alors l'une des racines est nulle.

3. Lorsque $\frac{c}{a} \geqslant 0$, alors les deux racines sont de même signe, et leur somme $-\frac{b}{a}$ a donc aussi le même signe que les racines.

   Par suite,

   - si $\dfrac{b}{a} \leqslant 0$, alors les deux racines sont positives ;
   - si $\dfrac{b}{a} \geqslant 0$, alors les deux racines sont négatives.

4. Lorsque $\dfrac{c}{a}$ est négatif, alors on sait que les racines sont de signes contraires et l'on peut alors les noter x_1 et x_2 avec :
   $$x_1 \leqslant 0 \leqslant x_2.$$
   Supposons par exemple $\dfrac{b}{a} \leqslant 0$; alors on a :
   $$0 \leqslant x_1 + x_2 = |x_2| - |x_1|.$$
   Ainsi $\dfrac{b}{a} \leqslant 0$ nous indique que c'est la racine positive qui a la plus grande valeur absolue.

Exercice 39 :

Comme, avec les notations classiques, on a $\dfrac{c}{a} = -1 < 0$, on en déduit :

- que l'équation $x^2 + 3\sqrt{3}\,x - 1 = 0$ possède deux racines réelles distinctes$^{(*)}$;
- que le produit de ces racines vaut -1 et donc que ces racines sont de signes opposés.

Par suite, l'une des racines est strictement positive et l'autre est strictement négative.

$^{(*)}$ *Voir éventuellement la remarque de la page de la page 8.*

Exercice 40 :

- Le discriminant de l'équation (E_1) vaut :
  $$\begin{aligned}\Delta &= 4\,m^2 - 4\,(m-1)\\ &= 4\,m^2 - 4\,m + 4\\ &= (2\,m-1)^2 + 3 \geqslant 3.\end{aligned}$$
  Pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'équation (E_m) a donc deux racines distinctes.

- Le produit des racines vaut $p = m - 1$. Par suite,
  - ∗ Si $m < 1$, ce produit est négatif, et donc l'équation (E_m) possède deux racines de signes opposés.
  - ∗ Si $m = 1$, alors l'une au moins de racines est nulle. En fait, l'équation (E_1) qui s'écrit :
  $$x^2 + 2\,x = 0,$$
  possède comme racines les réels 0 et -2.
  - ∗ Si $m > 1$, le produit des racines est positif et donc l'équation (E_m) possède deux racines de même signe. Comme la somme des racines, qui vaut $-2m$, est négative, les deux racines sont négatives.

Exercice 41 :

Cette équation ayant pour discriminant :

$$\Delta = 3 - 4 = -1,$$

elle ne possède aucune racine réelle et la question du signe ne se pose donc pas.

Exercice 42 :

1. L'équation ayant pour racines x_1 et x_2, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2).$$

Comme on a supposé $a > 0$, la règle des signes donne :

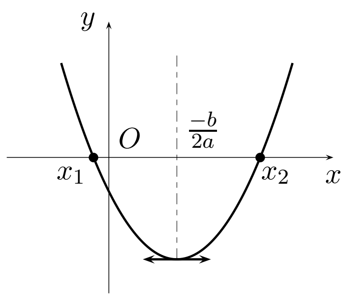
- si $\alpha \in \,]x_1, x_2[$, alors $f(\alpha) < 0$;
- si $\alpha \in \,]-\infty, x_1[\,\cup\,]x_2, +\infty[$, alors $f(\alpha) > 0$;
- si $\alpha = x_1$ ou $\alpha = x_2$, alors $f(\alpha) = 0$.

Comme ces trois cas s'excluent mutuellement, réciproquement la connaissance du signe de $f(\alpha)$ permet de placer α par rapport à x_1 et x_2. À savoir, lorsque $a > 0$:

- si $f(\alpha) < 0$, alors $\alpha \in \,]x_1, x_2[$;
- si $f(\alpha) > 0$, alors $\alpha \in \,]-\infty, x_1[\,\cup\,]x_2, +\infty[$;
- si $f(\alpha) = 0$ alors $x = x_1$ ou $x = x_2$.

Remarque Le résultat est visuellement évident avec une représentation graphique.

Lorsque la parabole tourne sa concavité vers le haut il est évident que $f(\alpha)$ est négatif lorsque α est entre les racines.



2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$a\,f(x) = a^2\,(x - x_1)\,(x - x_2),$$

quantité dont le signe ne dépend plus de celui de a. On en déduit donc :

$$a\,f(\alpha) < 0 \Leftrightarrow \alpha \in \,]x_1, x_2[.$$

ou aussi :

$$a\,f(\alpha) \leqslant 0 \Leftrightarrow \alpha \in [x_1, x_2].$$

3. Supposons $a\,f(\alpha) > 0$. D'après les résultats précédents, on a :

$$\alpha \in \left]-\infty, x_1\right[\cup \left]x_2, +\infty\right[$$

et donc :

$$\alpha < x_1 < x_2 \quad \text{ou} \quad x_1 < x_2 < \alpha.$$

- Si $\alpha < x_1 < x_2$, alors :

$$\alpha < x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2\,a} \quad \text{et donc} \quad \alpha + \frac{b}{2\,a} < 0.$$

- Si $x_1 < x_2 < \alpha$, alors :

$$-\frac{b}{2\,a} = \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2 < \alpha \quad \text{et donc} \quad \alpha + \frac{b}{2\,a} > 0.$$

Comme ces deux cas s'excluent mutuellement, on en déduit que le signe de $\alpha + \frac{b}{2\,a}$ permet de savoir si $\alpha < x_1$ ou $\alpha > x_2$.

Remarque Ce qu'il est essentiel ici de retenir, c'est que lorsque α est à l'extérieur des racines, on peut facilement déterminer dans quel intervalle il se trouve en le comparant à la demi-somme des racines.

Exercice 43 :

L'équation du second degré $x^2 + \sqrt{3}\,x - 1 = 0$ (E') a pour discriminant :

$$\Delta = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 4$$

qui est évidemment strictement positif. Par suite (E') possède deux racines distinctes que l'on notera u_1 et u_2 avec $u_1 < u_2$.

En posant $\varphi(x) = x^2 + \sqrt{3}\,x - 1$, on a :

$$\varphi(-1) = -\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \varphi(1) = \sqrt{3}.$$

Étant donné que le coefficient de x^2 est positif, on en déduit :

- d'abord que -1 est entre les racines, soit :

$$u_1 < -1 < u_2\ ;$$

- puis que 1 est extérieur aux racines ; grâce au point précédent on en déduit :

$$u_1 < -1 < u_2 < 1.$$

Par suite, (E') possède une unique racine u_2 dans $[-1, 1]$. Comme cos réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$, l'équation donnée possède une unique solution dans $[0, \pi]$.

Exercice 44 :

La relation de Chasles nous donne :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'}.$$

Comme $M' = \tau_{\vec{u}}(M)$, on a $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ et donc :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{u}.$$

En considérant successivement les deux composantes, on obtient :

$$x' = x + \alpha \quad \text{et} \quad y' = y + \beta.$$

Exercice 45 :

Étant donné :

- que l'équation de Γ est $y = f(x)$,
- que l'image de $M\big|_{y}^{x}$ est $M'\big|_{y'}^{x'}$ avec :

$$x' = x + \alpha \quad \text{et} \quad y' = y + \beta,$$

l'équation de l'image Γ' de Γ par la translation de vecteur $\vec{u}\big|_{\beta}^{\alpha}$ est :

$$y' - \beta = f(x' - \alpha)$$

ou encore :

$$y' = f(x' - \alpha) + \beta.$$

Exercice 46 :

La mise sous forme canonique nous dit que Γ a pour équation

$$y = a\left(\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a^2}\right)$$

ou encore :

$$y + \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a} = a\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2.$$

Par suite, le point $M\big|_{y}^{x}$ appartient à Γ si, et seulement si, le point de coordonnées :

$$\left(x + \frac{b}{2\,a}\,,\, y + \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a}\right)$$

appartient à Γ_a. Ainsi, d'après le résultat de l'exercice 45, la courbe Γ est l'image de Γ_a par la translation τ de vecteur de composantes :

$$\left(-\frac{b}{2\,a}\,,\, -\frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a}\right).$$

Exercice 47 :

Dans le cas réel, nous avions étudié :

- un problème d'identification : c'est la première question que nous étudierons ;
- la mise sous forme canonique : il n'y a pas de différence avec le cas réel ;
- les racines de l'équation $f(x) = 0$: nous justifierons que toute équation du second degré possède (au moins) une solution dans $\mathbb{C}$;
- le signe de la fonction f : cela n'a aucun sens pour une fonction à valeurs complexes puisqu'à notre niveau, nous n'utilisons aucune relation d'inégalité (encore appelée relation de comparaison ou relation d'ordre) dans $\mathbb{C}$;
- les variations de la fonction f : cela n'a aucun sens pour une fonction à valeurs complexes car, pour parler de variations (croissance, décroissance), il est nécessaire de disposer d'une relation d'inégalité, ce qui n'est pas le cas dans $\mathbb{C}$;

- la représentation graphique de la fonction f : c'est une question qui ne se pose pas pour une fonction d'une variable complexe et à valeurs complexes ; en effet il faudrait pouvoir « mettre $\mathbb{C}$ en abscisse » et « mettre $\mathbb{C}$ en ordonnée », ce qui n'est pas réalisable.

Exercice 48 :

Supposons :

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad a\,z^2 + b\,z + c \in \mathbb{R}. \tag{$*$}$$

La relation $(*)$ étant vraie pour $z = 0$, on a donc $c \in \mathbb{R}$.

Si l'on utilise alors $(*)$ avec $z = 1$ et $z = -1$, alors on obtient :

$$a + b + c \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad a - b + c \in \mathbb{R}.$$

Comme on a prouvé $c \in \mathbb{R}$, on en déduit :

$$a + b \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad a - b \in \mathbb{R}.$$

Par somme et différence, on obtient alors immédiatement :

$$2\,a \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad 2\,b \in \mathbb{R}$$

et donc :

$$a \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{R}.$$

Exercice 49 :

1. Puisque la propriété $a\,z^2 + b\,z + c = 0$ est vraie pour tout $z \in \mathbb{R}$, elle est vraie en particulier pour $z = 0$, ce qui donne $c = 0$. L'hypothèse devient alors :

   $$\forall z \in \mathbb{R} \quad a\,z^2 + b\,z = 0.$$

   En prenant successivement $z = 1$ et $z = -1$, on en déduit :

   $$a + b = 0 \quad \text{et} \quad a - b = 0,$$

   ce qui, par somme et différence, donne directement :

   $$a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0.$$

2. Par hypothèse, nous avons :

   $$\forall z \in \mathbb{C} \quad a\,z^2 + b\,z + c = 0$$

   et donc en particulier :

   $$\forall z \in \mathbb{R} \quad a\,z^2 + b\,z + c = 0.$$

   La question précédente nous dit alors que l'on a $a = b = c = 0$.

3. Supposons :

   $$\forall z \in \mathbb{C} \quad a\,z^2 + b\,z + c = a'\,z^2 + b'\,z + c',$$

   Il suffit de faire la différence pour obtenir :

   $$\forall z \in \mathbb{C} \quad (a - a')\,z^2 + (b - b')\,z + (c - c') = 0.$$

   On déduit alors de la question précédente :

   $$(a - a') = (b - b') = (c - c') = 0$$

   et donc $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$.

Exercice 50 :

Dans le cas réel, pour conclure $a = a'$, $b = b$ et $c = c'$, il suffit d'avoir :

$$a\,x^2 + b\,x + c = a'\,x^2 + b'\,x + c',$$

pour trois valeurs distinctes de la variable x.

J'espère que vous êtes capable de refaire rapidement la démonstration sans vous précipiter sur la solution (Sinon, ou pour confirmation, voir l'exercice 13).

Remarque Vous vous demandez peut-être : « pourquoi cette question ? », ou plutôt : « que fait ici cette question ? ».

- En fait, cette question est là simplement pour vous montrer comment vous pouvez assimiler les connaissances, non pas en les juxtaposant mais en les imbriquant (ce qui rend l'édifice plus solide).
- C'est en faisant ce genre d'aller-retour (ici, revenir au cas réel) que vous allez pouvoir comparer des énoncés voisins mais néanmoins différents et qu'il faudra, par la suite, utiliser à bon escient sans mélanger leurs hypothèses et leurs conclusions.

À l'avenir ce sera à vous de vous poser ce genre de question !

Exercice 51 :

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$f(z) = a\left(\left(z + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a^2}\right).$$

Exercice 52 :

1. L'équation $Z^2 = \alpha$ s'écrit aussi :

$$0 = Z^2 - \alpha = \left(Z - \sqrt{\alpha}\right)\left(Z + \sqrt{\alpha}\right).$$

Comme un produit de nombres complexes est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul, on en déduit :

$$Z = \sqrt{\alpha} \quad \text{ou} \quad Z = -\sqrt{\alpha}.$$

Ainsi, un réel $\alpha > 0$ n'a pas d'autre racine carrée complexe que les racines carrées réelles que nous connaissons déjà.

2. L'équation $Z^2 = \alpha$ s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} 0 &= Z^2 - \alpha \\ &= Z^2 - \left(i\,\sqrt{-\alpha}\right)^2 \\ &= \left(Z - i\,\sqrt{-\alpha}\right)\left(Z + i\,\sqrt{-\alpha}\right). \end{aligned}$$

Comme un produit de complexes est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul, $Z^2 = \alpha$ est alors équivalent à :

$$Z = i\,\sqrt{-\alpha} \quad \text{ou} \quad Z = -i\,\sqrt{-\alpha}.$$

Exercice 53 :

1. Cherchons $Z = r\,e^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, tel que :
$$Z^2 = r^2\,e^{2i\theta} = i = 1\,e^{i\frac{\pi}{2}}.$$
L'équation précédente équivaut à $r = 1$ et :
$$2\theta = \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \quad \text{ou encore} \quad \theta = \frac{\pi}{4}\,[\pi].$$
on en déduit :
$$Z = e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{ou} \quad Z = e^{i\frac{5\pi}{4}}.$$
Par suite, le complexe i possède deux racines carrées qui sont :
$$Z = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

2. Cherchons $Z = r\,e^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, tel que :
$$Z^2 = r^2\,e^{2i\theta} = 1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}.$$
L'équation précédente équivaut à $r = \sqrt{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{4}}$ et :
$$2\theta = \frac{\pi}{4}\,[2\pi] \quad \text{ou encore} \quad \theta = \frac{\pi}{8}\,[\pi].$$
on en déduit :
$$Z = 2^{\frac{1}{4}}\,e^{i\frac{\pi}{8}} \quad \text{ou} \quad Z = 2^{\frac{1}{4}}\,e^{i\frac{9\pi}{8}} = -2^{\frac{1}{4}}\,e^{i\frac{\pi}{8}}.$$
Par suite, le complexe $1 + i$ possède deux racines carrées qui sont :
$$Z = \pm\,2^{\frac{1}{4}}\,e^{i\frac{\pi}{8}}$$
ou encore :
$$Z = \pm\,2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\,\sin\frac{\pi}{8}\right).$$

Exercice 54 :

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Cherchons à quelles conditions un complexe Z vérifie $Z^2 = z$.

- Comme $z \neq 0$, on peut l'écrire sous forme trigonométrique $z = \rho\,e^{i\varphi}$.
- Comme z est non nul, 0 n'est pas une racine carrée de z.
  Cherchons donc $Z \in \mathbb{C}^*$ sous forme trigonométrique $Z = r\,e^{i\,\theta}$.
- Alors Z est une racine carrée de z si, et seulement si :
$$r^2\,e^{i\,2\theta} = \rho\,e^{i\varphi}.$$
Comme $r^2 > 0$ et $\rho > 0$, l'équation précédente équivaut à :
$$r^2 = \rho \quad \text{et} \quad 2\theta \equiv \varphi\;[2\pi].$$
Comme $r > 0$, cela équivaut aussi à :
$$r = \sqrt{\rho} \quad \text{et} \quad \theta \equiv \frac{\varphi}{2}\;[\pi].$$
Par suite, z admet deux racines opposées :
$$\sqrt{\rho}\,e^{i\,\frac{\varphi}{2}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\rho}\,e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)} = -\sqrt{\rho}\,e^{i\frac{\varphi}{2}}.$$

Exercice 55 :

Soit $Z = X + i\,Y$ avec $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ tel tel que :

$$(X + i\,Y)^2 = Z^2 = z = x + i\,y.$$

1. En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\begin{cases} X^2 - Y^2 & = & x & (i) \\ 2\,X\,Y & = & y & (ii) \end{cases}$$

2. L'égalité des modules nous donne :

$$X^2 + Y^2 = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (iii)$$

   - Par somme et différence de (i) et (iii), on obtient :

$$X^2 = \frac{x + \sqrt{x^2+y^2}}{2} \quad \text{et} \quad Y^2 = \frac{-x + \sqrt{x^2+y^2}}{2}.$$

     On en déduit X et Y au signe près, soit quatre possibilités puisque $y \neq 0$ et donc $X \neq 0$ ainsi que $Y \neq 0$.
   - D'après (ii) le produit $X\,Y$ est du signe de y et il existe donc seulement deux couples (X,Y) vérifiant ces trois conditions, couples que l'on peut alors exprimer en fonction de x et de y sans la moindre fonction trigonométrique.

Bien que n'utilisant que des conditions nécessaires (implications), le raisonnement précédent donne toutes les racines de z puisqu'il en donne au plus deux et que l'on sait qu'il en existe exactement deux.

Exercice 56 :

- Soit $Z = X + i\,Y$ tel que $Z^2 = 1 + i$. On a alors :

$$\begin{cases} X^2 - Y^2 & = & 1 & (i) \\ 2\,X\,Y & = & 1 & (ii) \\ X^2 + Y^2 & = & \sqrt{2} & (iii) \end{cases}$$

  Par somme et différence de (i) et (iii), on obtient :

$$X^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad Y^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

  et donc :

$$X = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \quad \text{et} \quad Y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$$

  Comme $2\,X\,Y = 2 \geqslant 0$, les réels X et Y doivent être de même signe ;
  les racines carrées de $1+i$ sont donc :

$$Z_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

  et

$$\text{et} \quad Z_2 = -Z_1 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$$

- Comme $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, les racines carrées de $1+i$ s'écrivent aussi :
$$\pm 2^{\frac{1}{4}}\,e^{i\frac{\pi}{8}}=\pm 2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right).$$
Puisque $\cos\frac{\pi}{8}>0$, on a $Z_1=2^{\frac{1}{4}}\,e^{i\frac{\pi}{8}}$, et donc :
$$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\quad\text{ainsi que}\quad\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\cdot$$

Exercice 57 :

En posant $\Delta=b^2-4\,a\,c$, pour tout $z\in\mathbb{C}$, on a :
$$\begin{aligned}a\,z^2+b\,z+c&=a\left(\left(z+\frac{b}{2\,a}\right)^2-\frac{b^2-4\,a\,c}{4\,a^2}\right)\\&=a\left(\left(z+\frac{b}{2\,a}\right)^2-\frac{\Delta}{4\,a^2}\right)\cdot\end{aligned}$$
Désignons par δ une racine carrée de Δ. Pour tout $z\in\mathbb{C}$, on a alors :
$$\begin{aligned}a\,z^2+b\,z+c&=a\left(\left(z+\frac{b}{2\,a}\right)^2-\frac{\delta^2}{4\,a^2}\right)\\&=a\left(z+\frac{b}{2\,a}+\frac{\delta}{2\,a}\right)\left(z+\frac{b}{2\,a}-\frac{\delta}{2\,a}\right)\cdot\end{aligned}$$
Il est alors immédiat que l'équation
$$a\,z^2+b\,z+c=0$$
possède une racine, par exemple :
$$z=-\frac{b}{2\,a}+\frac{\delta}{2\,a}\cdot$$

Exercice 58 :

Posons $\Delta=b^2-4\,a\,c$ et considérons δ une racine de Δ. La forme canonique s'écrit alors :
$$a\,z^2+b\,z+c=a\left(z+\frac{b}{2\,a}+\frac{\delta}{2\,a}\right)\left(z+\frac{b}{2\,a}-\frac{\delta}{2\,a}\right)\cdot$$
Il y a alors deux cas :

- **Premier cas :** $\Delta\neq 0$ et donc $\delta\neq 0$.
Comme un produit de complexes est nul si, et seulement si, l'un des deux est nul, on en déduit que l'équation (E) possède exactement deux racines (distinctes) qui sont :
$$z_1=\frac{-b+\delta}{2\,a}\quad\text{et}\quad z_2=\frac{-b-\delta}{2\,a}\cdot$$

- **Second cas :** $\Delta = 0$ et donc $\delta = 0$.
  Pour $z \in \mathbb{C}$, on a alors :
  $$a\,z^2 + b\,z + c = a\left(z + \frac{b}{2\,a}\right)^2,$$
  et l'équation (E) possède une unique racine qui est : $z_0 = -\dfrac{b}{2\,a}\cdot$

Exercice 59 :

Pour $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} z^2 - 2\,z\,\cos\theta + 1 &= (z - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta \\ &= (z - \cos\theta)^2 - (i\sin\theta)^2. \end{aligned}$$

On en déduit que les solutions de l'équation donnée vérifient :

$$z - \cos\theta = \pm i\sin\theta$$

ou encore :

$$z = \cos\theta \pm i\sin\theta.$$

Comme $\theta \in \,]0,\pi[$, on a $\sin\theta \neq 0$ et l'équation possède deux racines distinctes :

$$z_1 = e^{i\theta} \quad \text{et} \quad z_2 = e^{-i\theta}.$$

Exercice 60 :

Le discriminant de cette équation vaut :

$$\begin{aligned} \Delta &= (5-i)^2 - 4\times 6\left(2 - \frac{5\,i}{6}\right) \\ &= (24 - 10\,i) - 4\,(12 - 5\,i) \\ &= -24 + 10\,i. \end{aligned}$$

Cherchons $\delta = x + i\,y$ tel que $\Delta = -24 + 10\,i = \delta^2$.
Avec la méthode classique, cela mène à :

$$x^2 - y^2 = -24\,, \quad 2\,x\,y = 10 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = 26.$$

Par somme et différence, on en déduit :

$$x^2 = 1 \quad \text{et} \quad y^2 = 25,$$

ce qui donne :

$$x = \pm 1 \quad \text{et} \quad y = \pm 5.$$

En utilisant $2\,x\,y = 10$, on en déduit que $\delta = 1 + 5\,i$ est une racine de Δ.
Par suite, les racines de l'équation donnée sont :

$$\frac{(5-i) \pm (1 + 5\,i)}{12}$$

ou encore :

$$z_1 = \frac{3 + 2\,i}{6} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{2 - 3\,i}{6}\cdot$$

Exercice 61 :

Le produit $(2\,z-1)\,(3\,z-2)$ étant nul si, et seulement si, l'un de ses facteurs est nuls, les solutions de l'équation donnée sont :

$$z_1 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{2}{3}\cdot$$

Exercice 62 :

On suppose ici $\Delta \in \mathbb{R}_-^*$. Par suite, si δ vérifie $\delta^2 = \Delta$, alors δ est imaginaire pur.

(voir éventuellement question 2 de l'exercice 52)

Ainsi, il existe $\delta_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $\delta = i\,\delta_0$, et les racines de l'équation donnée :

$$\frac{-b - i\,\delta_0}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b + i\,\delta_0}{2a}$$

sont donc conjuguées.

Remarque Dans ce cas, les racines s'écrivent aussi :

$$\frac{-b - i\,\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b + i\,\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exercice 63 :

La réponse est « non » puisque l'équation :

$$i\,z^2 + i = 0$$

a pour solutions i et$-i$, qui sont conjugués, et n'est pas à coefficients réels.

Exercice 64 :

D'après l'hypothèse, la fonction :

$$h : z \mapsto f(z) - g(z) = (a - a')\,z^2 + (b - b')\,z + (c - c')$$

s'annule pour trois complexes distincts z_1, z_2 et z_3.

- Si $a \neq a'$, alors l'équation $h(z) = 0$ est du second degré et ne peut posséder plus de deux solutions. On en déduit par l'absurde $a = a'$.
- De même, on a $b = b'$ puisque, si $b \neq b'$, alors l'équation $h(z) = 0$, qui est du premier degré, ne possède qu'une solution.
- Enfin, on a $c = c'$, sinon l'équation $h(z) = 0$ n'a aucune solution.

Par suite, on a bien prouvé $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$.

Exercice 65 :

Soit $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$ le discriminant de l'équation :

$$a\,z^2 + b\,z + c = 0. \tag{E}$$

- **Premier cas :** $\Delta \neq 0$.
  Lorsque l'on a déterminé les racines de l'équation (E), on a vu que l'on a :
  $$\forall z \in \mathbb{R} \quad a\,z^2 + b\,z + c = a(z - z_1)\,(z - z_2)$$
  où z_1 et z_2 sont les deux racines distinctes de l'équation (E).

- **Second cas :** $\Delta = 0$.
  De même, dans ce cas, on a vu que l'on a :

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad a\,z^2 + b\,z + c = a\,(z - z_0)^2$$

  où z_0 est l'unique racine de (E), ce qui prouve le résultat avec $z_1 = z_2 = z_0$.

Exercice 66 :

Comme on connaît une forme factorisée de $a\,z^2 + b\,z + c$, il est immédiat que :

- si $z_1 \neq z_2$, alors l'équation a deux racines distinctes qui sont z_1 et z_2 ;
- si $z_1 = z_2$, alors l'équation a une unique racine qui est $z_1 = z_2$.

Exercice 67 :

L'ensemble S des solutions de l'équation :

$$a\,z^2 + b\,z + c = 0$$

contient 1 ou 2 éléments. Par hypothèse, S est aussi l'ensemble des racines de l'équation :

$$a'\,z^2 + b'\,z + c' = 0.$$

- **Premier cas :** $S = \{z_1, z_2\}$ avec z_1 et z_2 deux complexes distincts.
  On sait alors que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$a\,z^2 + b\,z + c = a\,(z - z_1)\,(z - z_2)$$

  et :

$$a'\,z^2 + b'\,z + c' = a'\,(z - z_1)\,(z - z_2).$$

  Comme $a \neq 0$, on en déduit immédiatement :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad a'\,z^2 + b'\,z + c' = \frac{a'}{a}\left(a\,z^2 + b\,z + c\right).$$

  Posons $k = \frac{a'}{a}\cdot$ En identifiant les coefficients, on obtient :

$$a' = k\,a\,, \quad b' = k\,b \quad \text{et} \quad c' = k\,c.$$

- **Second cas :** $S = \{z_0\}$ avec $z_0 \in \mathbb{C}$. On sait alors que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$a\,z^2 + b\,z + c = a\,(z - z_0)^2$$

  et :

$$a'\,z^2 + b'\,z + c' = a'\,(z - z_0)^2.$$

  Comme $a \neq 0$, on en déduit immédiatement :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad a'\,z^2 + b'\,z + c' = \frac{a'}{a}\left(a\,z^2 + b\,z + c\right)$$

  et l'on termine comme dans le cas précédent.

Exercice 68 :

Dans le domaine réel, l'énoncé serait le suivant. Soit a, b, c, a', b' et c' des réels tels que $a \neq 0$ et $a' \neq 0$. Si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \iff a'\,x^2 + b'\,x + c' = 0,$$

alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$a' = k\,a\,, \quad b' = k\,b \quad \text{et} \quad c' = k\,c.$$

Les deux équations :

$$x^2 + 1 = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + 2 = 0$$

ont sur $\mathbb{R}$ même ensemble (vide) de solutions et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left(x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4 = 0\right).$$

Pourtant, on ne peut pas trouver $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$1 = k\,1 \quad \text{et} \quad 1 = k\,4,$$

ce qui prouve que cette propriété est fausse sur $\mathbb{R}$.

Exercice 69 :

1. Comme z_1 et z_2 sont les deux racines distinctes ou confondues de l'équation $a\,z^2 + b\,z + c = 0$, nous avons vu que l'on a :

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad a\,z^2 + b\,z + c = a\,(z - z_1)\,(z - z_2)\,.$$

En identifiant, on en déduit :

$$\begin{aligned} \text{coeff. de } z \;&:\; b = -a\,(z_1 + z_2) \\ \text{coeff. constant} \;&:\; c = \;\; a\,z_1\,z_2 \end{aligned}$$

et, comme $a \neq 0$, on obtient :

$$s = z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad p = z_1\,z_2 = \frac{c}{a}\cdot$$

2. En utilisant les relations de la question précédente, on obtient :

$$\Delta = b^2 - 4\,a\,c = a^2\,(z_1 + z_2)^2 - 4\,a^2\,z_1\,z_2 = a^2\,(z_1 - z_2)^2\,.$$

Exercice 70 :

Soit z_1 et z_2 les deux racines conjuguées de l'équation.

- Leur somme est alors réelle car : $z_1 + z_2 = z_1 + \overline{z_1} = 2\,\mathrm{Re}\,z_1$.

  Par suite, on a $-\dfrac{b}{a} \in \mathbb{R}$.
- Leur produit est aussi réel car : $z_1\,z_2 = z_1\,\overline{z_1} = |z_1|^2$.

  Par suite, on a $\dfrac{c}{a} \in \mathbb{R}$.

Comme on sait que $a \in \mathbb{R}$, on en déduit : $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

Exercice 71 :

L'équation possède évidemment 1 comme racine.

Le produit des racines valant $-2\,i$, on en déduit que l'autre racine est $-2\,i$.

Remarque On peut aussi « voir directement » que $1-2i$ et $-2i$ sont respectivement la somme et le produit de 1 et de $-2\,i$.

Exercice 72 :

Les deux complexes $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ vérifient :

$$e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\,\cos\theta \quad \text{et} \quad e^{i\theta}\,e^{-i\theta}=1.$$

Par suite, ce sont les racines de l'équation :

$$z^2-2\,z\,\cos\theta+1=0.$$

Remarque Il est certain que, pour l'instant, cela peut vous sembler un peu parachuté mais avec un peu d'entraînement et un peu plus d'utilisation des nombres complexes, ces racines deviennent en quelque sorte des racines évidentes de l'équation donnée.

Exercice 73 :

On a résolu cette équation à l'exercice 60 de la page 21 et l'on a trouvé comme racines :

$$z_1=\frac{3+2\,i}{6} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{2-3\,i}{6}\cdot$$

On obtient immédiatement :

$$z_1+z_2=\frac{5-i}{6}$$

ainsi que :

$$z_1\,z_2=\frac{(3+2\,i)\,(2-3\,i)}{36}=\frac{12-5\,i}{36}=\frac{2-\frac{5i}{6}}{6}\cdot$$

Cela prouve que z_1 et z_2 sont bien les racines de l'équation donnée.

Remarque Je vous laisse imaginer les calculs d'une vérification à l'aide de deux substitutions dans l'équation donnée !