Table des matières

Puissances

I. Puissances entières 3

1. Puissances entières positives - Définition intuitive . . . 3
2. Puissances entières positives - Définition rigoureuse . . . 4
   - a) Le quantificateur universel . . . 5
   - b) Premières démonstrations . . . 6
3. Puissances entières négatives . . . 7
   - a) Définitions et propriétés . . . 7
   - b) Dérivation et intégration . . . 8

II. Autres puissances 10

1. Racine carrée d'un réel positif . . . 10
   - a) Définition et propriétés élémentaires . . . 10
   - b) La fameuse notation puissance $\frac{1}{2}$ . . . 11
2. Puissances fractionnaires des réels strictement positifs . . . 12
3. Puissances réelles des réels strictement positifs . . . 12
   - a) Définition et propriétés . . . 12
   - b) L'angoisse du 0^0 . . . 14
   - c) Dérivation et intégration . . . 14
4. Pour en finir avec « la » racine d'un nombre complexe . . . 16

III. Solutions des exercices 18

Avant de commencer !

Vous pouvez lire ou relire <l'introduction> qui explique le but de ce travail.

Si nécessaire, voir aussi le <mode d'emploi> pour les liens <www>.

Puissances

La raison première qui m'a incité à écrire ce chapitre réside dans une question qu'il m'arrive souvent de poser à de brillants élèves de Terminale qui envisagent de poursuivre des études supérieures scientifiques :

« Quelle est la définition de $\sqrt{a}$? »

Voici une liste non exhaustive de réponses incorrectes que j'ai pu avoir.

① $\sqrt{a}$ c'est quand on obtient a en élevant au carré.

② $\sqrt{a}$ est le nombre qui, élevé au carré, donne a.

③ $\sqrt{a}$ est un nombre qui, élevé au carré, donne a.

④ $\sqrt{a}$ est égal à $a^{\frac{1}{2}}$.

Que peut-on dire de ces réponses ?

- Je passerai rapidement sur la réponse ① qui relève d'un niveau infantile d'expression, puisqu'elle relie $\sqrt{a}$ qui est un nombre avec une proposition qui caractérise une action : « c'est quand ... ». Pour définir un nombre, il faut partir d'un nombre et en donner la ou les propriétés caractéristiques.
- La réponse ② est plus homogène, puisqu'elle dit que $\sqrt{a}$ est « le nombre qui ... » ; en revanche l'utilisation de l'article défini « le » la rend fausse : en effet, la présence de cet article défini entraîne l'unicité « du nombre qui élevé au carré donne a », alors qu'en général, il y en a deux qui sont opposés.
- La réponse ③ ne prête évidemment pas le flanc à la critique précédente puisqu'elle utilise l'article indéfini « un ». En revanche, elle ne donne pas une définition suffisamment précise de $\sqrt{a}$ puisque, pour $\sqrt{4}$ par exemple, certains pourraient prendre $+2$, alors que d'autres prendraient -2.
- Quand, à la personne qui m'a donné la réponse ④, je demande de me préciser la définition de a^n, j'obtiens invariablement :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ occurrences de } a}$$

ce qu'il est ensuite très difficile d'utiliser avec $n = \frac{1}{2}$.

Les quatre formulations (incorrectes) données ci-dessus, qui représentent la quasi totalité des réponses initiales, montrent à quel point les élèves de Terminale connaissent mal une notion qu'ils utilisent depuis longtemps.

Ne connaissant plus (ou pas) la définition précise de cette quantité, ils ont énormément de mal à assurer les règles de calcul qui permettent de la manipuler et les appliquent souvent au hasard voire avec beaucoup d'angoisse, ce qui donne des questions telles que : « A-t-on le droit, Monsieur, de dire que ... ? »

C'est pourquoi ce chapitre va vous permettre de passer en revue les différentes notions de puissances que vous avez progressivement rencontrées au cours de votre scolarité et ainsi de mieux comprendre définitions, règles et conventions.

Rappel de notations classiques utilisées dans ce chapitre

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels, ou encore des entiers positifs ;
- $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls ;
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers relatifs (entiers positifs et négatifs) ;
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels, quotients de deux éléments de $\mathbb{Z}$, le dénominateur étant évidemment non nul, voire strictement positif ;
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels (nombres rationnels et irrationnels).
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est l'ensemble des réels non nuls ;
- $\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des réels positifs (*i.e.* positifs ou nuls) ;
- $\mathbb{R}_+^*$ est l'ensemble des réels strictement positifs ;

Remarque Pour un réel quelconque et, en particulier pour un entier, « positif » signifie positif ou nul. Si l'on veut exclure 0, il faut dire « strictement positif ».

Évidemment, si vous lisez ce papier en fin de terminale, vous connaissez aussi l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes (sinon, oubliez ce cas, ainsi que l'exercice qui suit).

www **Ex 1 :** Que pensez-vous des ensembles $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{C}_+$, $\mathbb{C}_+^*$? p.18

I. Puissances entières

1. Puissances entières positives - Définition intuitive

Pour $a \in \mathbb{R}$, la notion intuitive, *que l'on doit avoir*, d'une puissance entière :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ occurrences de } a}$$

ne s'applique évidemment qu'aux puissances entières strictement positives, à cause du « n occurrences » évidemment. Elle est mathématiquement mal formulée mais permet d'assurer bon nombre de relations et aussi d'en retrouver la définition rigoureuse par récurrence, dont nous parlerons dans la partie suivante.

Remarque Si vous connaissez les complexes, vous n'avez aucun mal à voir que l'on peut, de la même manière, définir toute puissance strictement positive d'un complexe.

Première règle de calcul

À l'aide de la définition intuitive précédente il est immédiat de vérifier que, pour tout a appartenant à $\mathbb{R}$ (voire pour $a \in \mathbb{C}$), pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$a^n \times a^m = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ occurrences de } a} \times \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m \text{ occurrences de } a} = a^{n+m}$$

Deuxième règle de calcul Sous les mêmes hypothèse, on a aussi :

$$(a^n)^m = \underbrace{\underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ occurrences de } a} \times \cdots \times \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ occurrences de } a}}_{m \text{ occurrences de } a^n} = a^{nm}.$$

Remarque En cas de doute sur l'une des formules précédentes, inutile d'écrire des choses trop compliquées : il suffit de regarder des cas particuliers comme, par exemple, $n = 2$ et $m = 3$, qui permet de trancher entre a^{n+m} et a^{nm}.

Évidemment, il ne faut pas prendre $m = n = 2$.

www **Ex 2 :** Quelle troisième règle de calcul peut-on donner, concernant $(a \times b)^n$? p.18

Cas particuliers Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

- On a évidemment : $0^n = 0$ et $1^n = 1$.
- De plus, si $a^n = 0$, alors on a $a = 0$ puisqu'un produit de réels (de complexes) est nul si, et seulement si, l'un de ses termes vaut 0.

Définition de a^0

On définit a^0 pour que les règles de calcul précédemment rencontrées soient valables non seulement pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ mais aussi pour $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$. On veut donc en particulier avoir :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad a^n \times a^m = a^{n+m}.$$

Il est évident que $a^0 = 1$ est la bonne convention à prendre, pour que cette règle de calcul reste valable pour les entiers positifs (ce qui équivaut à « positifs ou nuls »).

D'où la définition suivante.

Définition 1

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ (voire $a \in \mathbb{C}$), on pose $a^0 = 1$.

2. Puissances entières positives - Définition rigoureuse

Reprenons ces notions de puissances entières positives, mais dans l'optique de ce que vous ferez en première année du supérieur. Au lieu de partir d'une définition intuitive utilisant des points de suspension, nous allons en donner une définition rigoureuse, ce qui nous permettra ensuite de démontrer les trois règles de calculs que vous utilisez couramment. Au final, rien de nouveau, mais une vraie justification.

Dans toute cette partie, a désigne un nombre réel quelconque mais, si vous connaissez les complexes, vous n'aurez aucun mal à vérifier que tous les énoncés restent valables pour $a \in \mathbb{C}$.

La notion de puissance positive se définit rigoureusement par récurrence.

Définition 2

Si a est un réel (voire un complexe) donné, alors on pose $a^0 = 1$ et,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on pose } a^{n+1} = a^n \times a.$$

Remarque Ce n'est pas un scoop si l'on pense à la définition intuitive !

Nous allons profiter de cette définition pour introduire un quantificateur souvent utilisé en mathématiques et avec lequel il est bon de commencer à vous familiariser.

a) Le quantificateur universel

Si, dans la définition précédente, on prend $a = 2$, alors :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } 2^{n+1} = 2^n \times 2. \qquad (\alpha)$$

La phrase (α) peut s'écrire de façon plus synthétique avec un **quantificateur** :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^{n+1} = 2^n \times 2. \qquad (\alpha')$$

- Le symbole « $\forall$ », appelé **quantificateur universel**, se lit « pour tout ».
- Ainsi, la phrase mathématique (α'), on dit aussi **l'assertion** (α'), traduit de façon plus compacte et plus lisible la phrase initiale (α).
- Contrairement aux apparences, l'énoncé (α') ne dépend pas de n ; on aurait le même énoncé en écrivant :

  $$\forall m \in \mathbb{N} \quad 2^{m+1} = 2^m \times 2. \qquad (\alpha'')$$

  C'est pourquoi la lettre n figurant dans (α'), aussi bien que la lettre m figurant dans (α''), sont qualifiées de **variables muettes**.

Remarque Le symbole « $\forall$ » que l'on vient d'introduire est très utile mais il ne faut l'utiliser que dans le contexte d'une assertion mathématique. *Il est strictement interdit d'utiliser ce symbole comme abréviation dans une phrase en français.*

D'après la définition précédente, la propriété (α) est valable, non seulement pour 2, mais aussi pour tout réel a, ce que l'on peut écrire avec deux quantificateurs :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a^{n+1} = a^n \times a, \qquad (\beta)$$

et qui se lit alors :

$$\text{pour tout } a \in \mathbb{R} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } a^{n+1} = a^n \times a. \qquad (\beta')$$

Dans un français un peu moins fluide, on pourrait aussi dire :

$$\text{pour tout } a \in \mathbb{R}, \text{ on sait que, pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } a^{n+1} = a^n \times a,$$

ce qui correspondrait à une écriture (équivalente à β) avec des parenthèses :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \big(\forall n \in \mathbb{N} \quad a^{n+1} = a^n \times a\big).$$

b) Premières démonstrations

On peut utiliser plus de deux quantificateurs, et, par exemple, la première règle de calcul sur les puissances s'écrit avec trois quantificateurs :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad a^m \times a^n = a^{m+n}. \tag{γ}$$

ce que l'on peut aussi voir sous la forme :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \Big(\forall n \in \mathbb{N} \quad \big(\forall m \in \mathbb{N} \quad a^m \times a^n = a^{m+n}\big)\Big).$$

- Pour démontrer l'assertion précédente qui est du type « $\forall a \in \mathbb{R} \ldots$ », on commence par prendre un réel $a_0 \in \mathbb{R}$ quelconque, et l'on essaie de prouver que ce qui suit est vrai pour a_0, c'est-à-dire que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \big(\forall m \in \mathbb{N} \quad a_0^m \times a_0^n = a_0^{m+n}\big).$$

- Considérons l'expression :

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad a_0^m \times a_0^n = a_0^{m+n}.$$

Étant donné que a_0 est fixé et que m est quantifié (*i.e.* précédé d'un quantificateur), cette expression ne dépend que de n et nous la noterons donc H_n.

- Comme n décrit $\mathbb{N}$, nous pouvons prouver H_n par récurrence.
  - ∗ La propriété :

$$H_0 : \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad a_0^m \times a_0^0 = a_0^m$$

  est vraie par définition de a^0 qui est égal à 1.
  - ∗ Pour l'hérédité, considérons $n_0 \in \mathbb{N}$ et supposons H_{n_0}, c'est-à-dire :

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad a_0^m \times a_0^{n_0} = a_0^{m+n_0}.$$

  Nous devons alors prouver H_{n_0+1}, c'est-à-dire :

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad a_0^m \times a_0^{n_0+1} = a_0^{m+n_0+1}.$$

  Pour ce faire, prenons un $m_0 \in \mathbb{N}$ quelconque. Alors :

$$\begin{aligned} a_0^{m_0} \times a_0^{n_0+1} &= a_0^{m_0} \times a_0^{n_0} \times a_0 && \text{par définition de } a_0^{n_0+1} \\ &= a_0^{m_0+n_0} \times a_0 && \text{d'après } H_{n_0} \\ &= a_0^{m_0+n_0+1} && \text{par définition de } a_0^{(m_0+n_0)+1}. \end{aligned}$$

Le principe de récurrence nous permet alors de dire que H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui termine la démonstration de cette règle de calcul.

www **Ex 3 :** Justifier la deuxième règle de calcul sur les puissances.

Évidemment, ne pas vous ruer sur les pages précédentes, mais écrire cette deuxième règle puis juger de l'exactitude de ce que vous avez écrit (comme si vous étiez en devoir surveillé) avant, éventuellement, de vérifier. p.18

www **Ex 4 :** Démontrer la troisième règle de calcul sur les puissances. p.19

www **Ex 5 :** Que vaut 0^0 ? p.19

www **Ex 6 :** Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Établir $\dfrac{1}{a^n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n$. p.19

Pour finir cette partie, rappelons un résultat de dérivation concernant les puissances.

www **Ex 7 :** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction u^n définie par :

$$u^n : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \big(u(x)\big)^n \end{array}$$

est dérivable, et exprimer $(u^n)'$ en fonction de u et u'. p.19

3. Puissances entières négatives

a) Définitions et propriétés

Nous allons maintenant définir les puissances négatives pour que les règles de calcul précédemment rencontrées soient valables non seulement pour $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ mais aussi pour $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{Z}$. On veut donc en particulier avoir :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad a^n \times a^m = a^{n+m}.$$

Avec cette contrainte (bien naturelle) on doit, en particulier, avoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a^n \times a^{-n} = a^0 = 1.$$

Par suite cela impose :

- que a^n soit non nul et donc, comme $n > 0$, que $a \neq 0$;
- que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

D'où la définition suivante.

Définition 3

Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ (voire $a \in \mathbb{C}^*$), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Attention *Contrairement à ce qui se passait dans la première partie, on ne parle de puissances négatives que pour des nombres (réels ou complexes) non nuls.*

Avec cette définition, les relations vues dans la section précédentes restent valables avec des exposants entiers relatifs. Pour tout réel $a \in \mathbb{R}^*$, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall m \in \mathbb{Z} \qquad a^n \times a^m = a^{n+m}$$

ainsi que :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall m \in \mathbb{Z} \qquad \left(a^n\right)^m = a^{nm}.$$

De même, pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad (a \times b)^n = a^n \times b^n.$$

Remarque Si vous connaissez les complexes, ces règles de calcul sont aussi valables lorsque a et b sont des nombres complexes non nuls.

www **Ex 8 :** Faut-il démontrer la première règle de calcul sur les puissances, ou est-elle vraie d'après ce qui est écrit au début de cette partie ? p.20

www **Ex 9 :** Démontrer les deux autres règles de calcul. p.21

Méthode Les démonstrations faites dans les exercices précédents, assez techniques et un peu fastidieuses, sont indispensables pour justifier ces règles de calcul pour les puissances entières quelconques. En revanche, pour les retenir et les assurer, il suffit de vous rappeler que ce sont les mêmes que pour les puissances positives.

www **Ex 10 :** Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$. Exprimer $\ln\left(a^n\right)$ en fonction de $\ln a$. p.22

b) Dérivation et intégration

Pour finir cette partie, vérifions que la règle de dérivation vues pour les puissances positives s'applique aussi aux puissances négatives.

www **Ex 11 :** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : I \to \mathbb{R}^*$ une fonction dérivable.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, montrer que la fonction u^n définie par :

$$u^n : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(u(x)\right)^n \end{array}$$

est dérivable, et exprimer $(u^n)'$ en fonction de u et u'. p.23

Exemple Pour calculer la dérivée de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^3} \end{array}$,

- il n'est pas efficace d'utiliser la règle de dérivation de $\dfrac{1}{u}$:
- on a plutôt intérêt à penser : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = x^{-3}$, ce donne directement :

$$f'(x) = -3\,x^{-4} = -\frac{3}{x^4}.$$

De même, une bonne utilisation du résultat précédent permet de vous faciliter la vie dans le domaine des calculs de primitives. En effet, on trouve souvent dans les livres de Terminale les résultats suivants que vous avez dû apprendre par cœur.

Si $u : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable, alors :

- Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $u^n \times u'$ admet pour primitive $\dfrac{1}{n+1} \times u^{n+1}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \neq 1$, la fonction $\dfrac{u'}{u^n}$ admet pour primitive $\dfrac{-1}{n-1} \times \dfrac{1}{u^{n-1}}$

  (dans ce cas, on suppose évidemment que u ne n'annule pas sur I).

Alors, qu'en fait, il n'y a qu'un résultat à connaître :

- Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1$, la fonction $u^n \times u'$ admet pour primitive $\dfrac{1}{n+1} \times u^{n+1}$.

Méthode En fait, il est même inutile « d'apprendre » ce dernier résultat : ce n'est que la règle de dérivation lue à l'envers.

- Si l'on connaît bien la règle de dérivation de u^n, alors il est immédiat que la fonction $u^n \times u'$ est la dérivée de « quelque chose en u^{n+1} ».
- Comme la dérivée de u^{n+1} fait apparaître la constante multiplicative $n+1$, on doit diviser par cette constante pour compenser.
- On en déduit que l'on peut prendre comme primitive : $\dfrac{1}{n+1} \times u^{n+1}$.

  Si jamais on l'avait oublié (ce qui est humain), le fait de diviser par $n+1$ permet de se rappeler que l'on doit avoir $n \neq -1$, ce que l'on s'empressera de mettre au début de la rédaction !

Une telle façon de calculer une primitive en deux temps (mais à la vitesse de la lumière) évite toute angoisse et tout risque d'erreur.

Exemple Pour calculer une primitive de $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x^3} \end{array}$, on a intérêt à penser :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = x^{-3}$$

ce qui permet de prendre comme primitive « quelque chose en $x^{-3+1} = x^{-2}$ » : en dérivant de tête ce x^{-2}, on voit que l'on peut prendre comme primitive :

$$F : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\dfrac{1}{2}\,x^{-2} = -\dfrac{1}{2\,x^2} \end{array}$$

www **Ex 12 :** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : I \to \mathbb{R}^*$ une fonction dérivable. p.23

Donner une primitive de $u^n \times u'$ lorsque $n = -1$.

www **Ex 13 :** Donner une primitive de $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos^3 x \sin x \end{array}$. p.23

II. Autres puissances

1. Racine carrée d'un réel positif

a) Définition et propriétés élémentaires

Commençons par deux questions essentielles.

www **Ex 14 :** Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Que pensez-vous des affirmations suivantes ?

1. Si l'on a $a = b$, alors on peut en déduire $a^2 = b^2$.
2. Si l'on a $a^2 = b^2$, alors on peut en déduire $a = b$? p.23

Les réponses erronées vues dans le prologue de ce chapitre (et qui auraient pu éventuellement être les vôtres) permettent de mieux cerner la définition suivante, qu'il est indispensable non pas d'apprendre mais de connaître au plus profond de vous.

Définition 4

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, la racine de a, notée $\sqrt{a}$, est le réel positif de carré a.

Caractérisation pratique Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, le réel $\sqrt{a}$ est donc défini par :

$$\sqrt{a} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Maintenant, quelques questions indiscrètes mais essentielles pour la suite.

www **Ex 15 :** Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, peut-on simplifier $\left(\sqrt{a}\right)^2$ et $\sqrt{a^2}$?
Mêmes questions en supposant $a \in \mathbb{R}$. p.24

www **Ex 16 :** Si $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$ et $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, peut-on en déduire $a = b$? p.24

www **Ex 17 :** Si $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$ et $a = b$, peut-on en déduire $\sqrt{a} = \sqrt{b}$? p.24

www **Ex 18 :** Si $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$, peut-on en déduire $\sqrt{a\,b} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}$? p.24

www **Ex 19 :** Si $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$, peut-on en déduire $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$? p.25

Méthode

- J'espère que, grâce à cette suite d'exercices, vous avez compris qu'une bonne connaissance de la définition de la racine d'un nombre réel positif, liée à un brin de réflexion, permet facilement de confirmer ou d'infirmer facilement chacune des affirmations précédentes.
- Je ne sais si vous vous en êtes rendu compte mais c'est le genre d'affirmations que vous pouvez avoir envie d'énoncer lorsque vous manipulez des radicaux, et sur la validité desquelles il vous arrive peut-être (souvent ?) d'hésiter.
- Cela vous a peut-être paru long et fastidieux de re-réfléchir au lieu d'appliquer des recettes toutes faites mais il en est toujours ainsi lorsque l'on utilise une nouvelle méthode. Avec un peu d'entraînement, ce genre de démarche arrive au niveau du réflexe, se fait automatiquement et, surtout, beaucoup plus rapidement. Toutefois son intérêt essentiel est de rendre plus assuré bon nombre d'affirmations tout en libérant la mémoire et en diminuant l'angoisse !

Remarque N'oubliez surtout pas ce que l'on a vu précédemment :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \sqrt{a^2} = |a|.$$

Voir éventuellement exercice 15 si nécessaire.

b) La fameuse notation puissance $\frac{1}{2}$

Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Alors les relations :

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad \text{et} \quad \sqrt{a^2} = a$$

peuvent apparaître comme une extension de la règle de calcul :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad (a^n)^m = a^{n\,m}$$

avec d'une part $n = \frac{1}{2}$, $m = 2$ et d'autre part $n = 2, m = \frac{1}{2}\cdot$

Notation Voilà pourquoi $\sqrt{a}$ se note aussi $a^{\frac{1}{2}}$.

Remarque À ce niveau, cela est d'un intérêt limité mais permet surtout d'éviter de retenir une règle de dérivation particulière pour $\sqrt{u}$ (voir exercice suivant).

www **Ex 20 :** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : I \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction dérivable. Montrer que la fonction $\sqrt{u}$ définie par :

$$\sqrt{u} : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u(x) & \longmapsto & \sqrt{u(x)} \end{array}$$

est dérivable et exprimer $\left(\sqrt{u}\right)'$ en fonction de u et u'. p.25

www **Ex 21 :** Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, exprimer $\ln\left(a^{\frac{1}{2}}\right)$ en fonction de $\ln a$. p.26

2. Puissances fractionnaires des réels strictement positifs (culture générale)

On peut, pour le plaisir, généraliser la notion de puissance $\frac{1}{2}$ et introduire celle de puissance rationnelle. Comme cela n'est plus vraiment à la mode et ne fait partie ni du programme de Terminale ni du programme de première année du supérieur, vous pouvez voir cette partie comme une occasion de vous poser quelques questions et de dérouler quelques raisonnements intéressants, mais vous pouvez aussi la laisser de côté dans la mesure où vous n'en aurez pas besoin pour travailler la suite.

- Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$ et tout $q \in \mathbb{N}^*$, on commence par définir $a^{1/q}$ comme l'unique réel x positif tel que $x^q = a$. Autrement dit :

$$x = a^{1/q} \iff \left(x^q = a \quad \text{et} \quad x \geqslant 0\right)$$

- Ensuite, si $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$a^r = (a^p)^{\frac{1}{q}}.$$

www **Ex 22 :** Quelle justification nécessite la définition du premier point ci-dessus ? p.26

www **Ex 23 :** Quelle justification nécessite la définition du second point ci-dessus ? p.26

Une fois définie correctement la notion de puissance rationnelle d'un réel strictement positif (*cf.* exercices précédents), on peut démontrer que les règles de calcul prouvées pour les puissances entières, restent valables pour ces puissances rationnelles. Nous ne le ferons pas ici car on peut aussi les déduire des résultats de la partie suivante.

www **Ex 24 :** Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in \mathbb{Q}$. Exprimer $\ln(a^r)$ à l'aide de $\ln a$. p.27

3. Puissances réelles des réels strictement positifs

Nous allons ici introduire une notion qui n'est pas au programme de Terminale mais que vous utiliserez en première année du supérieur, celle de puissance réelle.

Prérequis La lecture de cette partie suppose connues la fonction logarithme népérien ainsi que la fonction exponentielle.

a) Définition et propriétés

Remarque Si $a \in \mathbb{R}_+^*$ et si α est un élément pour lequel on a défini a^α, *i.e.* $\alpha \in \mathbb{Z}$ ou $\alpha = \frac{1}{2}$, voire $\alpha \in \mathbb{Q}$ si vous avez travaillé la partie précédente, alors les exercices 10, 21 et 24 ont permis de prouver que :

$$\ln\left(a^\alpha\right) = \alpha \, \ln a$$

et donc :

$$a^\alpha = e^{\alpha \, \ln a}.$$

C'est pourquoi l'on généralise la notion de puissance avec la définition suivante.

Définition 5

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit $a^\alpha = \exp(\alpha \ln a) = e^{\alpha \ln a}$.

Remarque Lorsque l'on ne sait pas que α est entier, c'est la définition précédente qu'il faut utiliser sans réfléchir !

Méthode Si vous apprenez par cœur la seule définition précédente, un jour ou l'autre (si cela ne vous est pas déjà arrivé) vous serez pétri d'angoisse : a-t-on

$$a^\alpha = \exp(\alpha \ln a) \quad \text{ou} \quad a^\alpha = \exp(a \ln \alpha) \ ?$$

En revanche, si vous pensez au logarithme de a^α (en particulier par exemple pour $\alpha = 2$ ou $\alpha = 3$), je crois que vous n'aurez aucun mal à dire que c'est :

$$\alpha \ln a \quad \text{et non pas} \quad a \ln \alpha.$$

Il suffit alors « d'en prendre l'exponentielle » pour avoir sans la moindre angoisse :

$$a^\alpha = \exp\big(\ln(a^\alpha)\big) = \exp(\alpha \ln a).$$

Pourquoi se priver d'une telle « anti-sèche » tout à fait légale ?

Remarque Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, d'après la définition, on a évidemment :

$$a^\alpha > 0 \quad \text{et} \quad \ln(a^\alpha) = \alpha \ln a.$$

www **Ex 25 :** Justifier les deux affirmations précédentes. p.27

Les règles de calcul sur les puissances réelles sont les mêmes que celles sur les puissances entières (rien de nouveau à retenir) sauf qu'elles ne s'appliquent qu'à des puissances de nombres réels strictement positifs.

www **Ex 26 :** Justifier ces règles de calcul sur les puissances réelles. p.28

Exemples Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

- On a par exemple $a^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{a}\right)^3 = \sqrt{a^3}$.
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $a^{-\alpha} = \dfrac{1}{a^\alpha}$; en particulier : $a^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

  Par suite, la « convention » que nous avions prise à l'exercice 20, pour écrire la dérivée de $\sqrt{u}$, est une simple application de la règle sur les puissances réelles.

b) L'angoisse du 0^0

« 0^0 » est-il vraiment défini ou est-ce une forme indéterminée ?

- Nous avons vu précédemment que, par définition, on a :
$$0^0 = 1.$$
Cela règle le problème du point de vue algébrique, c'est-à-dire lorsque l'on traite d'additions et/ou de multiplications et donc de puissances.
- En revanche, dans le domaine de l'analyse, c'est-à-dire lorsque l'on parle de fonctions et en particulier de limites, il arrive de rencontrer 0^0 avec une tout autre signification comme, par exemple, dans le cas suivant.
Soit $]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a < b$. Si l'on dispose de deux fonctions :
$$f :]a, b[\to \mathbb{R}_+^* \quad \text{et} \quad g :]a, b[\to \mathbb{R}$$
alors on peut définir $h :]a, b[\to \mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in]a, b[\quad h(x) = f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln(f(x))}.$$
Si, l'on a :
$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0, \tag{$*$}$$
on ne peut *a priori* rien conclure sur la limite en a de $x \mapsto g(x) \ln(f(x))$ car :
$$\lim_{x \to a} \ln(f(x)) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0.$$
Il y a donc, comme on dit souvent « forme indéterminée ». Vu l'hypothèse $(*)$, cette forme indéterminée est notée 0^0 ; c'est l'origine de la confusion.

En conclusion, il suffit de savoir si l'on parle d'algèbre ou d'analyse.

c) Dérivation et intégration

Nous pouvons maintenant donner une dernière formule concernant la dérivée des puissances de fonctions.

www **Ex 27 :** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $u : I \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction dérivable.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que la fonction u^α définie par :
$$u^\alpha : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u(x) & \longmapsto & \big(u(x)\big)^\alpha \end{array}$$
est dérivable et que $\big(u^\alpha\big)' = \alpha\, u^{\alpha - 1}\, u'$. p.29

Méthode Par suite, la règle permettant de calculer la dérivée d'une puissance (constante) de fonction dérivable est la même que cette puissance soit un entier positif, un entier relatif ou un nombre réel quelconque.

www **Ex 28 :** Montrer que la fonction :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^x \end{array}$$

est dérivable et en calculer la dérivée. p.29

Méthode Comme pour les puissances entières, une bonne utilisation du résultat précédent permet de vous faciliter la vie dans le domaine des calculs de primitives. Dans la suite, on considère α un réel différent de -1, ainsi que $u : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable à valeurs strictement positives.

- Si l'on connaît bien la règle de dérivation de u^α, alors il est immédiat que la fonction $u^\alpha \times u'$ est la dérivée de « quelque chose en $u^{\alpha+1}$ ».
- Comme la dérivée de $u^{\alpha+1}$ fait apparaître la constante multiplicative $\alpha+1$, on doit diviser par cette constante pour compenser.
- On en déduit la forme d'une primitive : $\dfrac{1}{\alpha+1} \times u^{\alpha+1}$.

  Si jamais on l'avait oublié (ce qui est humain), le fait de diviser par $\alpha + 1$ permet de se rappeler que l'on doit avoir $\alpha \neq -1$, ce que l'on s'empressera de mettre au début de la rédaction !

Une telle façon de calculer une primitive en deux temps (mais à la vitesse de la lumière) évite toute angoisse et tout risque d'erreur.

Exemple Pour calculer une primitive de $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$, on a intérêt à penser :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

ce qui permet de prendre comme primitive « quelque chose en $x^{\frac{1}{2}+1} = x^{\frac{3}{2}}$ » : en dérivant de tête ce $x^{\frac{3}{2}}$, on voit que l'on peut prendre comme primitive :

$$F: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} = \dfrac{2}{3}\left(\sqrt{x}\,\right)^3 \end{array}$$

www **Ex 29 :** Donner une primitive de $f: \begin{array}{ccc} [2, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x}\sqrt{\ln^3 x} \end{array}$. p.29

4. Pour en finir avec « la » racine d'un nombre complexe

Si l'on peut, comme nous l'avons vu, définir sans peine :

- les puissances entières positives de tout nombre complexe,
- les puissances entières relatives de tout nombre complexe non nul,

les choses se gâtent dès que l'on veut passer à la puissance $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire définir la racine carrée d'un nombre complexe.

Définition 6

On appelle **racine carrée** d'un complexe a tout complexe z tel que $z^2 = a$.

Remarque Dans le chapitre sur le trinôme du second degré *(partie II.3.a Racines carrées d'un nombre complexe)*, il est démontré que tout complexe non nul possède deux racines carrées distinctes et opposées alors que 0 est la seule racine carrée de 0.

www **Ex 30 :** Expliquer pourquoi on ne peut pas, pour un complexe, copier la méthode utilisée pour définir la racine d'un nombre réel positif. p.29

Essayons quelques méthodes pour privilégier une racine de a.

www **Ex 31 :** Soit $a \in \mathbb{C}$. Que pensez-vous de la définition suivante de $\sqrt{a}$?

« En prenant $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$a = r\, e^{i\,\theta} = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta)\,,$$

on pose $\sqrt{a} = \sqrt{r}\, e^{i\,\frac{\theta}{2}}$. » p.29

www **Ex 32 :** Soit $a \in \mathbb{C}$. Dire pourquoi la « définition » suivante est incorrecte :

« $\sqrt{a}$ est le complexe z tel que $z^2 = a$ et $\operatorname{Re} z \geqslant 0$. » p.30

www **Ex 33 :** Pour $a \in \mathbb{C}$, essayons de donner une dernière définition de $\sqrt{a}$.

- Si $a \notin \mathbb{R}_-^*$, on désigne par $\sqrt{a}$ la racine de a de partie réelle positive.
- Sinon, on désigne par $\sqrt{a}$ la racine de a de partie imaginaire positive.

Avec cette définition de la fonction racine sur $\mathbb{C}$: p.30

1. pour tout $a \in \mathbb{C}$ a-t-on $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$?
2. pour tout $a \in \mathbb{C}$ a-t-on $\sqrt{a^2} = a$?
3. pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$, a-t-on $\sqrt{a\,b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$?

Pour jouer avec cette dernière fonction racine, <cliquer ici>.

En Conclusion

- Même si l'échec de nos « malheureuses » tentatives précédentes, ne prouve pas qu'il soit impossible de définir une fonction racine sur $\mathbb{C}$, j'espère que vous comprendrez pourquoi une telle notion ne figure pas dans les programmes de la première année du supérieur.
- Dans le mesure où il n'y a aucune définition de racine d'un complexe dans le programme, il est évident que vous provoquerez, chez tout professeur ou interrogateur, une réaction explosive si vous utilisez la notation $\sqrt{z}$ lorsque z est un complexe dont on ne sait rien de plus !

  En effet, l'utilisation d'une écriture du type $f(z)$, où f est une fonction, suppose l'unicité de l'élément désigné par $f(z)$.

Remarque linguistique J'espère que dans ce qui précède (énoncés, aides et corrections des exercices), vous avez été attentif à la présence, selon les cas :

- des articles définis « le » ou « la », dont l'utilisation suppose que l'on soit sûr de l'unicité de l'objet référencé ;
- des articles indéfinis « un » ou « une », que l'on doit utiliser tant que l'on n'a aucune information d'unicité sur l'objet référencé.

Il est dommage que certains, lorsqu'ils font des mathématiques, négligent d'être attentifs à une utilisation correcte et rigoureuse du français. Outre que ce genre de comportement laxiste risque de diminuer drastiquement la qualité de leur copie, une mauvaise utilisation chronique du français aboutit souvent à une augmentation de l'angoisse et à un affaiblissement du niveau par manque de précision et de rigueur dans leurs raisonnements ou dans les questions qu'ils se posent.

III. Solutions des exercices

Exercice 1 :

- Il n'y a aucun problème pour $\mathbb{C}^*$: c'est l'ensemble des nombres complexes non nuls, ce qui se note aussi $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.
- En revanche, comme sur $\mathbb{C}$, on n'utilise pas usuellement de relation d'ordre, *i.e.* on n'utilise pas usuellement de relation permettant de dire si un élément est plus grand ou plus petit qu'un autre, les notations $\mathbb{C}_+$ et $\mathbb{C}_+^*$ n'ont aucun sens.

Exercice 2 :

Pour $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ (voire $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$) et $n \in \mathbb{N}^*$, la notion intuitive permet facilement de vérifier que l'on a :

$$\begin{aligned}(a\times b)^n &= \underbrace{(a\times b)\times(a\times b)\times\cdots\times(a\times b)}_{n\,\text{occurrences de }(a\times b)}\\ &= \underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\,\text{occurrences de }a}\times\underbrace{b\times b\times\cdots\times b}_{n\,\text{occurrences de }b}\\ &= a^n\times b^n.\end{aligned}$$

Exercice 3 :

Démontrons :

$$\forall a\in\mathbb{R}\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad \forall m\in\mathbb{N}\quad (a^m)^n=a^{mn}.$$

Soit a_0 un réel quelconque.

Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ la propriété :

$$\forall m\in\mathbb{N}\quad (a_0^m)^n=a_0^{mn}. \qquad (H_n)$$

- La propriété :
$$H_0:\quad \forall m\in\mathbb{N}\quad (a_0^m)^0=a_0^{m\times 0}$$
est évidemment vraie puisque $(a_0^m)^0=1=a_0^0=a_0^{m\times 0}$.
- Pour l'hérédité, considérons $n_0\in\mathbb{N}$ et supposons H_{n_0}, c'est-à-dire :
$$\forall m\in\mathbb{N}\quad (a^m)^{n_0}=a^{mn_0}.$$
Nous devons alors prouver H_{n_0+1}, c'est-à-dire :
$$\forall m\in\mathbb{N}\quad (a^m)^{n_0+1}=a^{m(n_0+1)}.$$
Pour ce faire, prenons un $m_0\in\mathbb{N}$ quelconque. Alors :
$$\begin{aligned}(a^{m_0})^{n_0+1} &= (a_0^{m_0})^{n_0}\times a_0^{m_0} && \text{par définition des puissances}\\ &= a_0^{m_0n_0}\times a_0^{m_0} && \text{d'après } H_{n_0}\\ &= a_0^{m_0n_0+m_0} && \text{d'après la première règle}\\ &= a_0^{m_0(n_0+1)}.\end{aligned}$$

Le principe de récurrence nous permet alors de dire que H_n est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$, ce qui termine la démonstration de cette deuxième règle de calcul.

Exercice 4 :

Démontrons :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (a \times b)^n = a^n \times b^n.$$

Soit $a_0 \in \mathbb{R}$ et $b_0 \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrons par récurrence sur n :

$$(a_0 \times b_0)^n = a_0^n \times b_0^n \qquad (H_n)$$

- La propriété H_0 est vraie puisque $(a_0 \times b_0)^0 = 1 = a_0^0 \times b_0^0$.
- Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que H_{n_0} soit vraie. Alors :

$$\begin{aligned}
(a_0 \times b_0)^{n_0+1} &= (a_0 \times b_0)^{n_0} \times (a_0 \times b_0) && \text{par définition de } (a_0 \times b_0)^{n_0+1} \\
&= (a_0^{n_0} \times b_0^{n_0}) \times (a_0 \times b_0) && \text{d'après } H_{n_0} \\
&= (a_0^{n_0} \times a_0) \times (b_0^{n_0} \times b_0) && \text{règles usuelles de calcul dans } \mathbb{R} \\
&= a_0^{n_0+1} \times b_0^{n_0+1}.
\end{aligned}$$

Le principe de récurrence nous permet alors de dire que H_n est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui termine la démonstration de cette troisième règle de calcul.

Exercice 5 :

Étant donné que 0 est un réel comme un autre, la définition nous dit que :

$$0^0 = 1.$$

Rappelons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0^n = 0.$$

C'est évident avec la définition intuitive et il est facile de le justifier par récurrence avec la définition rigoureuse.

Exercice 6 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la troisième règle de calcul sur les puissances positives, on a :

$$a^n \times \left(\frac{1}{a}\right)^n = \left(a \times \frac{1}{a}\right)^n = 1^n = 1.$$

On en déduit que $\left(\frac{1}{a}\right)^n$ est l'inverse de a^n, ce qui équivaut à :

$$\frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

Exercice 7 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit H_n l'assertion :

$$(u^n)' = n\, u^{n-1}\, u'. \qquad (H_n)$$

- H_1 est trivialement vraie puisqu'alors $u^{n-1} = u^0 = 1$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que H_n soit vraie. Alors $u^{n+1} = u^n\, u$ est dérivable comme produit de fonctions dérivables et :

$$\begin{aligned}
(u^{n+1})' &= \big(u^n\, u\big)' \\
&= \big(u^n\big)'\, u + \big(u^n\big)\, u' && \text{dérivation d'un produit} \\
&= \big(n\, u^{n-1}\, u'\big)\, u + u^n\, u' && \text{d'après } H_n \\
&= (n+1)\, u^n\, u'.
\end{aligned}$$

Par suite, H_{n+1} est vraie, et on en déduit le résultat d'après le principe de récurrence.

Exercice 8 :

Il faut évidemment justifier cette première règle de calcul. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Montrons :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad a^n \times a^m = a^{n+m}.$$

- On déjà prouvé la relation $a^n \times a^m = a^{n+m}$ si $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$.
- Supposons $n < 0$ et $m < 0$. Alors :

$$\begin{aligned}
a^n \times a^m &= \frac{1}{a^{-n}} \times \frac{1}{a^{-m}} && (1) \\
&= \frac{1}{a^{-n} \times a^{-m}} && (2) \\
&= \frac{1}{a^{(-n)+(-m)}} && (3) \\
&= \frac{1}{a^{-(n+m)}} \\
&= a^{n+m} && (4)
\end{aligned}$$

Les égalités (1) et (4) proviennent de la définition des puissances négatives, alors que la relation (3) vient de la première règle de calcul sur les puissances positives. Quant à (2), c'est l'application d'une règle de calcul sur $\mathbb{R}^*$:

$$\frac{1}{x} \times \frac{1}{y} = \frac{1}{x \times y}.$$

- Supposons $n < 0$ et $m \geqslant 0$. Il y a alors deux cas.
  - $*$ Si $m + n \geqslant 0$, alors les règles de calcul sur les puissances positives donnent :

$$a^m = a^{n+m+(-n)} = a^{n+m} \times a^{-n}.$$

On en déduit le résultat en multipliant les deux membres de cette relation par a^n et en utilisant :

$$a^n \times a^{-n} = 1$$

qui est vrai par définition des puissances négatives.

* Si $m+n<0$, alors les règles de calcul sur les puissances positives donnent :

$$a^{-(n+m)} \times a^m = a^{-n}$$

En multipliant par a^n, on obtient :

$$a^{-(n+m)} \times a^m \times a^n = a^{-n} \times a^n = 1.$$

En multipliant cette dernière relation par a^{m+n}, et en utilisant $a^{-(m+n)} \times a^{m+n} = 1$, on en déduit :

$$a^m \times a^n = a^{n+m}.$$

- Le cas $m<0$ et $n \geqslant 0$ se déduit du précédent puisque :

$$a^n \times a^m = a^m \times a^n.$$

Exercice 9 :

- Deuxième règle de calcul : soit $a \in \mathbb{R}^*$. Montrons :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad (a^n)^m = a^{nm}.$$

* On déjà prouvé la relation $(a^n)^m = a^{nm}$ si $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$.
* Supposons $n<0$ et $m<0$. Alors :

$$\begin{aligned}
(a^n)^m &= \left(\frac{1}{a^n}\right)^{-m} && (1)\\
&= \left(\frac{1}{\frac{1}{a^{-n}}}\right)^{-m} && (2)\\
&= (a^{-n})^{-m} && (3)\\
&= a^{(-n)\times(-m)} && (4)\\
&= a^{nm}. && (5)
\end{aligned}$$

Explication des lignes précédentes :

⋆ (1) et (2) proviennent de la définition des puissances négatives.
⋆ (3) n'est que la simplification $\frac{1}{\frac{1}{x}} = x$.
⋆ (4) vient de la deuxième règle concernant les puissances positives.
⋆ (5) n'est que l'application de la règle des signes dans $\mathbb{N}$.

* Supposons $n<0$ et $m \geqslant 0$. Alors :

$$\begin{aligned}
(a^n)^m &= \left(\frac{1}{a^{-n}}\right)^{m} && (1)\\
&= \frac{1}{(a^{-n})^m} && (2)\\
&= \frac{1}{a^{(-n)m}} && (3)\\
&= \frac{1}{a^{-nm}} && (4)\\
&= a^{nm}. && (5)
\end{aligned}$$

Explication des lignes précédentes :

- ⋆ (1) et (5) proviennent de la définition des puissances négatives.
- ⋆ (2) vient de $\left(\frac{1}{x}\right)^m = \frac{1}{x^m}$ car $m \geqslant 0$.
- ⋆ (3) vient de la deuxième règle concernant les puissances positives.
- ⋆ (4) n'est que l'application de la règle des signes dans $\mathbb{N}$.

∗ Supposons $n \geqslant 0$ et $m < 0$. Alors :

$$\begin{aligned} (a^n)^m &= \left(\frac{1}{a^n}\right)^{-m} && (1) \\ &= \frac{1}{(a^n)^{-m}} && (2) \\ &= \frac{1}{a^{n(-m)}} && (3) \\ &= \frac{1}{a^{-nm}} && (4) \\ &= a^{nm}. && (5) \end{aligned}$$

Explication des lignes précédentes :

- ⋆ (1) et (5) proviennent de la définition des puissances négatives.
- ⋆ (2) vient de $\left(\frac{1}{x}\right)^{-m} = \frac{1}{x^{-m}}$ car $-m > 0$.
- ⋆ (3) vient de la deuxième règle concernant les puissances positives.
- ⋆ (4) n'est que l'application de la règle des signes dans $\mathbb{N}$.

- Troisième règle de calcul : soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}^*$. Montrons :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad (a \times b)^n = a^n \times b^n.$$

∗ On a déjà justifié ce résultat pour tout $n \in \mathbb{N}$.
∗ Supposons $n < 0$. Alors :

$$\begin{aligned} (a \times b)^n &= \frac{1}{(a \times b)^{-n}} && (1) \\ &= \frac{1}{a^{-n} \times b^{-n}} && (2) \\ &= \frac{1}{a^{-n}} \times \frac{1}{b^{-n}} && (3) \\ &= a^n \times b^n. && (4) \end{aligned}$$

Explication des lignes précédentes :

- ⋆ (1) et (4) proviennent de la définition des puissances négatives.
- ⋆ (2) vient de la troisième règle concernant les puissances positives.
- ⋆ (3) vient de $\frac{1}{x\,y} = \frac{1}{x}\,\frac{1}{y}$.

Exercice 10 :

- Pour $n \in \mathbb{N}$, montrons par récurrence :

$$\ln(a^n) = n \ln a. \qquad (H_n)$$

∗ H_0 est vraie puisque $\ln(a^0) = \ln 1 = 0$.

∗ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n est vraie. On a alors :

$$\begin{aligned} \ln(a^{n+1}) &= \ln(a^n \times a) \\ &= \ln(a^n) + \ln a \\ &= n \ln a + \ln a && \text{d'après } H_n \\ &= (n+1) \ln a. \end{aligned}$$

On en déduit H_{n+1}, ce qui termine la démonstration par récurrence. Ainsi H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Supposons $n < 0$. Alors :

$$\begin{aligned} \ln(a^n) &= \ln\left(\frac{1}{a^{-n}}\right) \\ &= -\ln(a^{-n}) && \text{car } \ln(\tfrac{1}{x}) = -\ln x \\ &= -(-n) \ln a && \text{car } -n \in \mathbb{N} \\ &= n \ln a. \end{aligned}$$

On en déduit que H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 11 :

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on connaît le résultat.
- Supposons $n < 0$ et donc $-n > 0$. On sait alors que u^{-n} est dérivable et que :

$$(u^{-n})' = -n\, u^{-n-1}\, u'.$$

Comme :

$$u^n = \frac{1}{u^{-n}}$$

on en déduit que u^n est dérivable et que :

$$(u^n)' = -\frac{-n\, u^{-n-1}\, u'}{u^{-2n}} = n\, u^{n-1}\, u'.$$

- Pour $n = 0$, la relation reste valable puisque $u^n = u^0$ est alors la fonction constante 1.

Exercice 12 :

Comme primitive de $\dfrac{u'}{u}$, on peut prendre $\ln |u|$.

Exercice 13 :

La fonction f admet comme primitive $F : x \mapsto -\dfrac{1}{4} \cos^4 x$.

Exercice 14 :

1. Bien sûr que cette affirmation est vraie !
   Si deux nombres sont égaux, alors leurs carrés sont égaux.

2. Cette affirmation est évidemment fausse puisque, par exemple :
$$(-1)^2 = 1^2 \quad \text{et pourtant} \quad -1 \neq 1.$$
En revanche, on peut en déduire :
$$a = \pm b.$$
puisque la relation $a^2 = b^2$ s'écrit aussi :
$$0 = a^2 - b^2 = (a-b)\,(a+b)$$
et qu'un produit de nombres réels est nul si , et seulement si, l'un d'eux est nuls.

Exercice 15 :

- Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, on a évidemment :
$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a = \sqrt{a^2}.$$
  - ∗ La première égalité vient du fait que $\sqrt{a}$ est, par définition, un nombre dont le carré vaut a.
  - ∗ La seconde parce que a est un réel, ici supposé positif, dont le carré vaut a^2.
- La première expression, $\left(\sqrt{a}\right)^2$, n'est définie que pour $a \in \mathbb{R}_+$, et :
$$\forall a \in \mathbb{R}^+ \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$
La seconde, $\sqrt{a^2}$, est définie pour tout $a \in \mathbb{R}$ et :
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \sqrt{a^2} = |a|.$$
Pour le justifier, il suffit de distinguer les cas $a \geqslant 0$ et $a \leqslant 0$.

  Remarque Cette dernière formule doit tenir du réflexe ! Quand vous simplifiez $\sqrt{a^2}$, ne jamais oublier la valeur absolue ; sauf, bien sûr, si le signe de a est évident.

Exercice 16 :

De l'égalité $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, on déduit :
$$a = \left(\sqrt{a}\right)^2 = \left(\sqrt{b}\right)^2 = b.$$

Exercice 17 :

La définition même de la racine et la notation $\sqrt{a}$ entraînent que, pour un a donné, il y a unicité de sa racine. Donc, si $a = b$, alors $\sqrt{a} = \sqrt{b}$.

Exercice 18 :

Posons $x = \sqrt{a}\,\sqrt{b}$. On a alors :
$$\begin{aligned} x^2 &= \left(\sqrt{a}\,\sqrt{b}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{a}\right)^2\left(\sqrt{b}\right)^2 \\ &= a\,b. \end{aligned}$$
Comme $\sqrt{a} \geqslant 0$ et $\sqrt{b} \geqslant 0$, on a $x \geqslant 0$, ce qui entraîne $x = \sqrt{a\,b}$ et donc :
$$\sqrt{a\,b} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}.$$

Exercice 19 :

Le contre-exemple :

$$a = b = 1$$

permet de vérifier que l'on n'a pas toujours $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Exercice 20 :

Soit $x_0 \in I$. Considérons le taux d'accroissement :

$$\frac{\sqrt{u(x)} - \sqrt{u(x_0)}}{x - x_0}.$$

Comme u est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\sqrt{u(x)} + \sqrt{u(x_0)} > \sqrt{u(x_0)} > 0,$$

et ce taux d'accroissement s'écrit aussi :

$$\frac{\left(\sqrt{u(x)} - \sqrt{u(x_0)}\right)\left(\sqrt{u(x)} + \sqrt{u(x_0)}\right)}{(x - x_0)\left(\sqrt{u(x)} + \sqrt{u(x_0)}\right)}$$

ou encore :

$$\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \, \frac{1}{\sqrt{u(x)} + \sqrt{u(x_0)}}.$$

Étant donné

- que u est dérivable, on a :
$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0) \;;$$
- que $u(x_0) \neq 0$, on a :
$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{u(x)} + \sqrt{u(x_0)}} = \frac{1}{2\sqrt{u(x_0)}}.$$

On en déduit que $\sqrt{u}$ est dérivable en x_0 et que :

$$\left(\sqrt{u}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0)}{2\sqrt{u(x_0)}}.$$

Par suite, on a :

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

En prenant (pour l'instant) comme convention :

$$\frac{1}{\sqrt{u}} = u^{-\frac{1}{2}}$$

on voit que l'on a :

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \left(u^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\, u^{-\frac{1}{2}}\, u'$$

ce qui donne formellement la même règle de calcul que pour les puissances entières de u.

Exercice 21 :

Étant donné que :

$$\ln a = \ln\left(\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2\right) = 2\,\ln\left(a^{\frac{1}{2}}\right),$$

on en déduit $\ln\left(a^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\,\ln a$.

Exercice 22 :

Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Considérons la fonction :

$$f:\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^q \end{array}.$$

- f est continue et vérifie $f(0) = 0$ ainsi que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;

  d'après le théorème des valeurs intermédiaires, son image contient l'intervalle $[0, +\infty[$; donc, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, l'équation $f(x) = a$ possède au moins une solution.

- La fonction f est strictement croissante car $q \geqslant 1$; par suite :

  $$\text{si } x \neq y \text{ alors } f(x) \neq f(y)$$

  et donc :

  $$\text{si } f(x) = f(y) \text{ alors } x = y,$$

  ce qui entraîne que l'équation $f(x) = a$ possède au plus une solution.

On a donc prouvé que, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $x^q = a$, ce qui justifie que l'on ait pu prendre la définition donnée dans le premier point.

Remarque On aurait pu directement établir le résultat précédent (existence et unicité) en utilisant le « théorème de la bijection » mais j'ai préféré décomposer en deux, existence puis unicité, pour bien mettre en évidence ce qui est utilisé pour justifier chacune des propriétés. Il n'est jamais trop tôt pour commencer à être précis !

Exercice 23 :

Pour rendre cette définition correcte, il faut vérifier que :

$$\text{si}\quad \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \quad\text{alors}\quad (a^p)^{\frac{1}{q}} = (a^{p'})^{\frac{1}{q'}}.$$

Considérons donc des entiers p, q, p' et q' tels que $\dfrac{p}{q} = \dfrac{p'}{q'}$.

- Supposons $\dfrac{p}{q}$ irréductible. Alors il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que :

  $$p' = k\,p \quad\text{et}\quad q' = k\,q.$$

  Posons :

  $$x = \left(a^{p'}\right)^{\frac{1}{q'}} = \left(a^{kp}\right)^{\frac{1}{kq}}.$$

  Par définition de la puissance $\frac{1}{kq}$, on a alors :

  $$x^{kq} = a^{kp}$$

et donc (seconde règle de calcul sur les puissances entières) :

$$\left(x^q\right)^k = \left(a^p\right)^k.$$

Comme la fonction $x \mapsto x^k$ est strictement croissante, on en déduit :

$$x^q = a^p$$

ce qui, comme $x \geqslant 0$, entraîne :

$$x = (a^p)^{\frac{1}{q}}.$$

- Dans le cas général, considérons $\dfrac{p_1}{q_1}$ une forme irréductible de $\dfrac{p}{q}$ et donc aussi de $\dfrac{p'}{q'}\cdot$. D'après ce qui précède, on a :

$$(a^p)^{\frac{1}{q}} = (a^{p_1})^{\frac{1}{q_1}} = (a^{p'})^{\frac{1}{q'}}$$

ce qui prouve le résultat.

Exercice 24 :

- Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Par définition de $a^{\frac{1}{q}}$, on a :

$$a = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q.$$

Comme q est entier, on en déduit que :

$$\ln a = \ln\left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q\right) = q \,\ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right).$$

En divisant par $q \neq 0$, on en déduit :

$$\ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{1}{q}\,\ln a.$$

- Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$. Comme p est un entier relatif, on a :

$$\ln\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = \ln\left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p\right) = p\,\ln\left(a^{\frac{1}{q}}\right).$$

En utilisant le résultat du premier point, on en déduit :

$$\ln\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q}\,\ln a.$$

Exercice 25 :

- La fonction exponentielle ne prenant que des valeurs strictement positives, on a :

$$a^\alpha = \exp(\alpha\,\ln a) > 0.$$

- Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\ln(\exp x) = x$, on en déduit :

$$\ln(a^\alpha) = \ln\left(\exp(\alpha\,\ln a)\right) = \alpha\,\ln a.$$

Exercice 26 :

1. Première règle : $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad a^\alpha \times a^\beta = a^{\alpha+\beta}$.

   Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Alors :

   - par définition des puissances réelles on a :
   $$a^\alpha \times a^\beta = e^{\alpha \ln a} \times e^{\beta \ln a} \ ;$$
   - la propriété fondamentale de la fonction exp nous donne :
   $$e^{\alpha \ln a} \times e^{\beta \ln a} = e^{\alpha \ln a + \beta \ln a} \ ;$$
   - par distributivité de la multiplication sur l'addition dans $\mathbb{R}$, on obtient :
   $$e^{\alpha \ln a + \beta \ln a} = e^{(\alpha+\beta)\ \ln a} \ ;$$
   - enfin, par définition de la puissance $\alpha + \beta$, on a :
   $$e^{(\alpha+\beta)\ \ln a} = a^{\alpha+\beta},$$
   ce qui termine la démonstration.

2. Deuxième règle : $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\,\beta}$.

   Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Alors :

   - par définition de la puissance β, on a :
   $$(a^\alpha)^\beta = e^{\beta \ln(a^\alpha)} \ ;$$
   - comme $\ln(a^\alpha) = \alpha \ln a$, on en déduit :
   $$e^{\beta \ln(a^\alpha)} = e^{\beta(\alpha \ln a)} = e^{(\beta\alpha)\ \ln a} \ ;$$
   - enfin, par définition de la puissances $\alpha\beta$, on a :
   $$e^{(\beta\,\alpha)\ \ln a} = a^{\alpha\beta}$$
   ce qui termine la démonstration.

3. Troisième règle : $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall b \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (a \times b)^\alpha = a^\alpha \times b^\alpha$.

   Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

   - par définition des puissances réelles on a :
   $$(a \times b)^\alpha = e^{\alpha \ln(a \times b)} \ ;$$
   - on en déduit :
   $$(a \times b)^\alpha = e^{\alpha(\ln a + \ln b)} = e^{\alpha \ln a + \alpha\ \ln b} \ ;$$
   et donc :
   $$(a \times b)^\alpha = e^{\alpha \ln a} \times e^{\alpha\ \ln b} \ ;$$
   - enfin, par définition des puissances réelles on a :
   $$(a \times b)^\alpha = a^\alpha \times b^\alpha$$
   ce qui termine la démonstration.

Exercice 27 :

Pour tout $x \in I$, nous avons :

$$u^\alpha(x) = \big(u(x)\big)^\alpha = e^{\alpha \ln(u(x))}.$$

Étant donné que u est dérivable, la fonction $v : x \mapsto \alpha \ln\big(u(x)\big)$ est dérivable et :

$$\forall x \in I \quad v'(x) = \alpha\,\frac{u'(x)}{u(x)}\ ;$$

on en déduit que $u^\alpha : x \mapsto e^{v(x)}$ est dérivable et que, pour $x \in I$:

$$\begin{aligned}\big(u^\alpha\big)'(x) &= e^{v(x)}\,v'(x)\\ &= \big(u(x)\big)^\alpha\,\alpha\,\frac{u'(x)}{u(x)}\\ &= \alpha\,\big(u(x)\big)^{\alpha-1}\,u'(x).\end{aligned}$$

On peut aussi écrire le résultat précédent sous la forme :

$$\big(u^\alpha\big)' = \alpha\,u^{\alpha-1}\,u'.$$

Exercice 28 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$f(x) = e^{x\ln x}.$$

D'après les théorèmes généraux, cette fonction est dérivable, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$f'(x) = e^{x\ln x}(1 + \ln x).$$

Exercice 29 :

La fonction f admet comme primitive $F : x \mapsto \dfrac{2}{5}\,(\ln x)^{\frac{5}{2}}$.

Exercice 30 :

Dans $\mathbb{R}$ c'est la relation d'ordre (relation de comparaison, relation d'inégalité), qui nous a permis de privilégier l'une de ces racines, en choisissant la racine positive. Comme, dans $\mathbb{C}$, on n'utilise pas habituellement de relation d'ordre, on ne peut pas utiliser cette méthode dans $\mathbb{C}$.

Exercice 31 :

Le réel θ utilisé est ce que l'on appelle un argument du complexe a, et il est défini modulo 2π ; par suite, si quelqu'un prend θ comme argument de a, alors un autre peut prendre $\theta + 2\,\pi$.

Ainsi,

- le premier obtient $\sqrt{a} = \sqrt{r}\,e^{\frac{i\,\theta}{2}}$,
- alors que le second obtient $\sqrt{a} = \sqrt{r}\,e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} = -\sqrt{r}\,e^{\frac{i\,\theta}{2}}$.

Donc,on n'obtient pas un unique complexe $\sqrt{a}$ alors que la notation $\sqrt{a}$ l'exigerait.

Exercice 32 :

Si $a = -1$, alors les deux racines de a, qui sont i et $-i$, ont toutes deux une partie réelle positive ; dans un tel cas, le critère donné ne permet donc pas de choisir.

Remarque Rappelons que « positif » signifie « supérieur ou égal à 0 ».

Exercice 33 :

1. Par définition, $\sqrt{a}$ est l'une des racines carrées de a.
   Par suite, son carré est bien égal à a.
2. La relation $\sqrt{a^2} = a$ n'est pas vraie pour tout a, puisque :
   $$\sqrt{(-1)^2} = 1.$$
3. Si la relation :
   $$\forall a \in \mathbb{C} \quad \forall b \in \mathbb{C} \quad \sqrt{a\,b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$
   était vraie, alors on aurait en particulier :
   $$\forall a \in \mathbb{C} \quad \sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a,$$
   ce qui est faux d'après la question précédente.